Apunte 4

Existencia y Unicidad

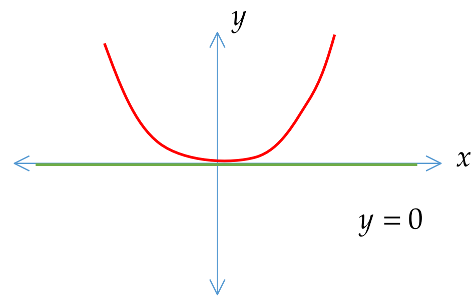
Considerar un PVI:

¿Existe la solución del problema?, Si existe la solución, ¿Es única?

PVI:

$y' = xy^{\frac{1}{2}} \qquad 0 = x * 0^{\frac{1}{2}} = 0$

$y(0) = 0 \qquad y(0) = 0$



El PVI tiene como solución:

$$y = 0$$

Por otro lado, la función:

$$y = \frac{x^4}{16}$$

Es también solución del PVI.

$$y' = \frac{x^3}{4} \qquad \frac{x^3}{4} = x\frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$$

$$y(0) = \frac{0^4}{16} = 0$$

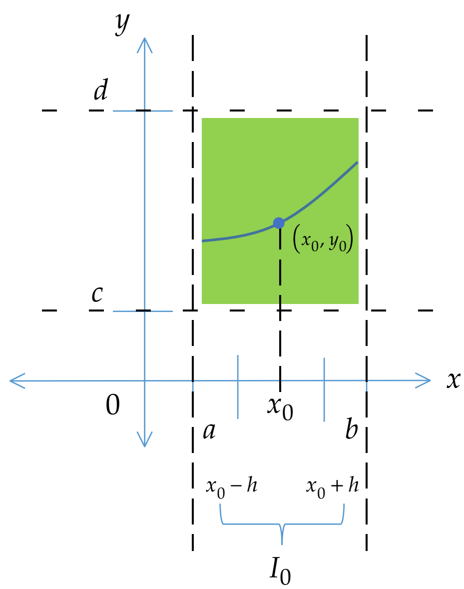
Este PVI no tiene solución única.

Teorema: Existencia de una solución única.

Sea R una región rectangular en el plano XY definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo I_0: $(x_0 - h\ , x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en [a, b], y una función ÚNICA y(x), definida en I_0 que es una solución del problema de valores iniciales.

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$



Ejemplo:

$y' = f(x, y)$

$y(x_0) = y_0$

$$\boxed{\begin{array}{c} y' = xy^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0 \end{array}} \longrightarrow$$

No tiene solución única.

$$f(x, y) = xy^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{2y^{\frac{1}{2}}}$$

$$f(0, y) = 0 * y^{\frac{1}{2}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} = \frac{0}{2y^{\frac{1}{2}}} = 0$$

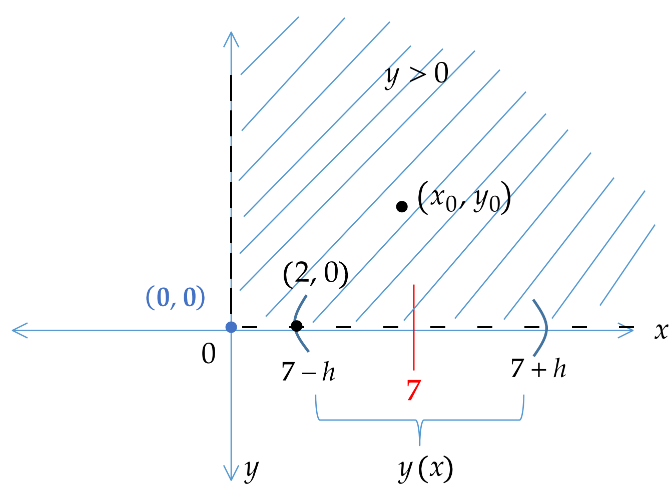
$$y' = xy^{\frac{1}{2}}$$
$$y(7) = 7$$

El PVI tiene solución única $y(x)$ definida en $I = (7 - h, 7 + h)$ $\;h > 0$

$$y' = xy^{\frac{1}{2}}$$
$$y(2) = 2$$

El PVI tiene solución única $y(x)$ definida en $I = (2 - h, 2 + h)$ $\;h > 0$

$$y' = xy^{\frac{1}{2}}$$
$$y(2) = 0$$



Intervalo de Existencia y Unicidad

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y$$

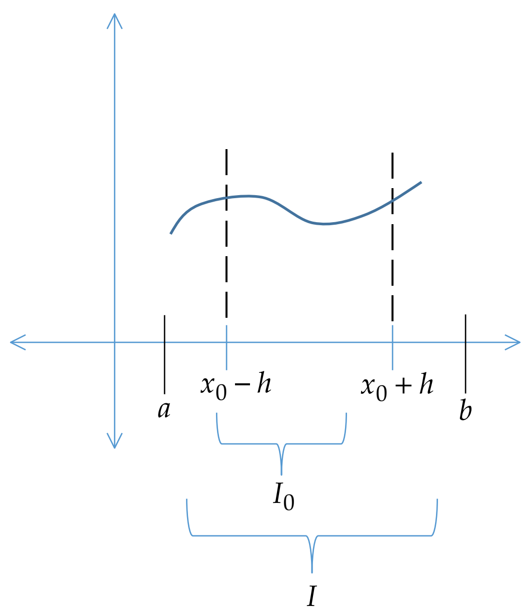
Supongamos que $y(x)$ representa una solución al PVI.

Los siguientes 3 conjuntos (intervalos) pueden no ser iguales:

i. El dominio de la función $y(x)$

ii. El intervalo I en el cual la solución $y(x)$ está definida o existe.

iii. El intervalo I_0 de existencia y unicidad.

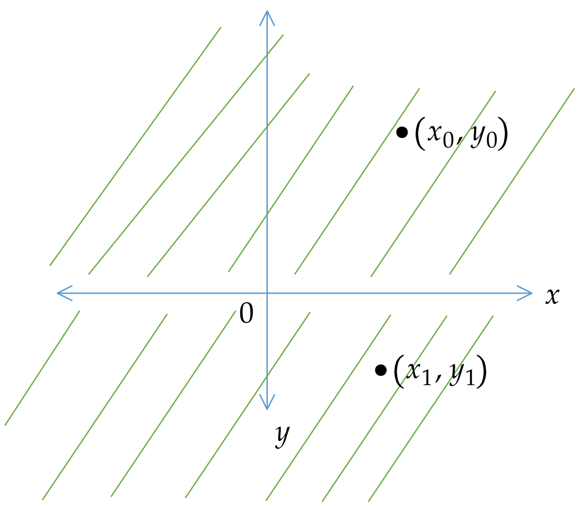


Determinar una región del plano XY para el cual la ecc. Diferencial.

$$y' = y^{\frac{2}{3}} \qquad\qquad y' = f(x, y)$$

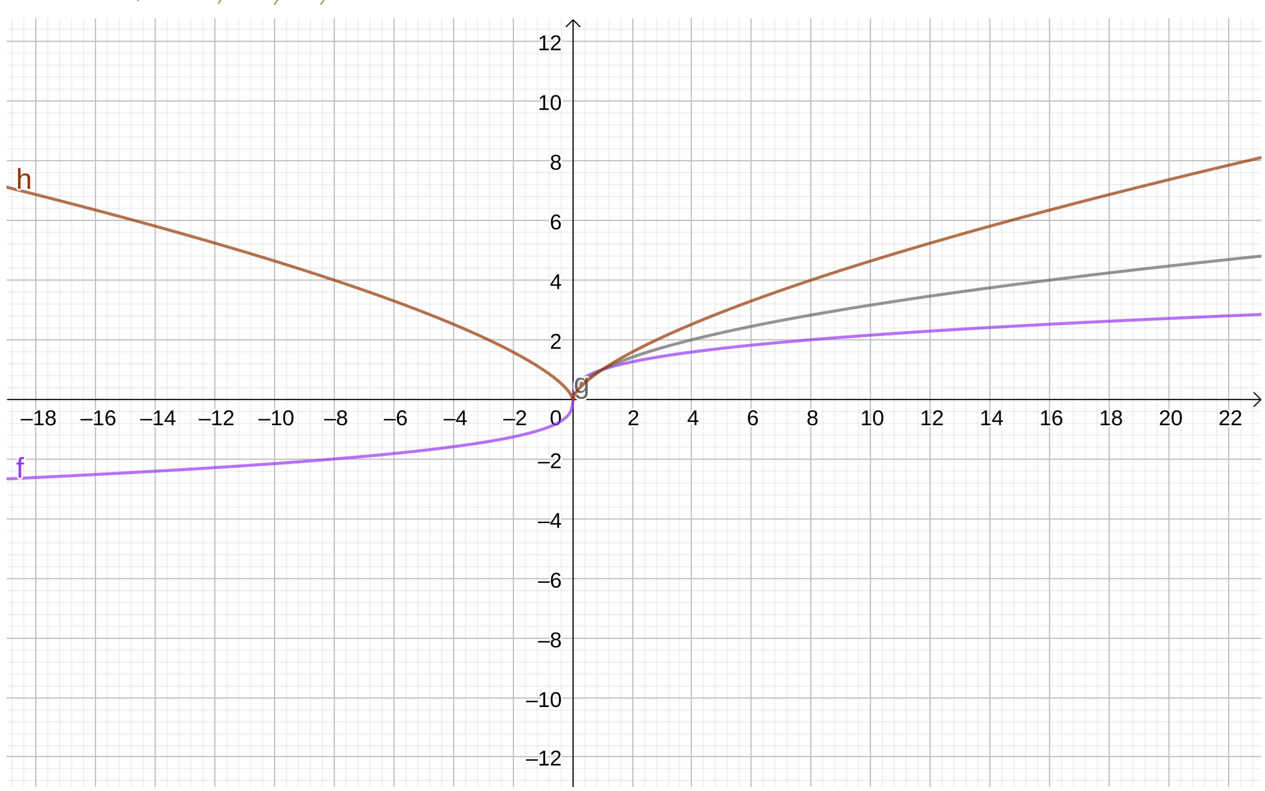
Tendría una solución única cuyas gráficas pasen por el punto (x_0, y_0) en la región.

Solución: $\quad f(x, y) = y^{\frac{2}{3}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3y^{\frac{1}{3}}} \qquad \sqrt[3]{y^2}$



$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(x_0) = y_0 \quad con \quad y_0 \neq 0 \end{cases}$$

El PVI tiene solución única.



Ejemplos:

$$y' = y^{\frac{2}{3}} \qquad y(2) = 2 \qquad sol.\ única$$

$$y' = y^{\frac{2}{3}} \qquad y(2) = 0 \qquad no\ tiene\ sol.\ única$$

$$y' = y^{\frac{2}{3}} \qquad y(3) = 2 \qquad (3{,}2) \qquad sol.\ única$$

Determinar si el Teorema de existencia y Unicidad garantiza que la ED:

$$y' = \sqrt{y^2 - 9}$$

Tiene solución única que pasa por el punto (1, 4).

Solución:

$$PVI \qquad y' = \sqrt{y^2 - 9}$$

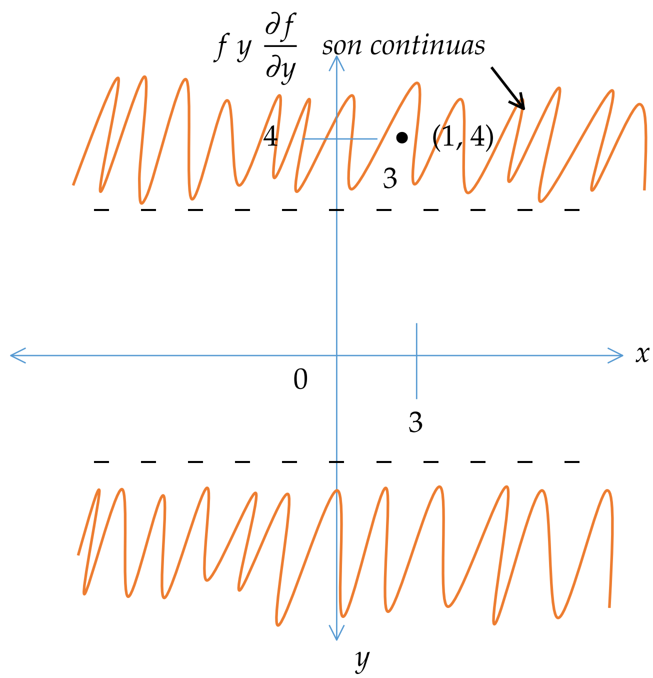
$$y(1) = 4$$

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - 9}$$

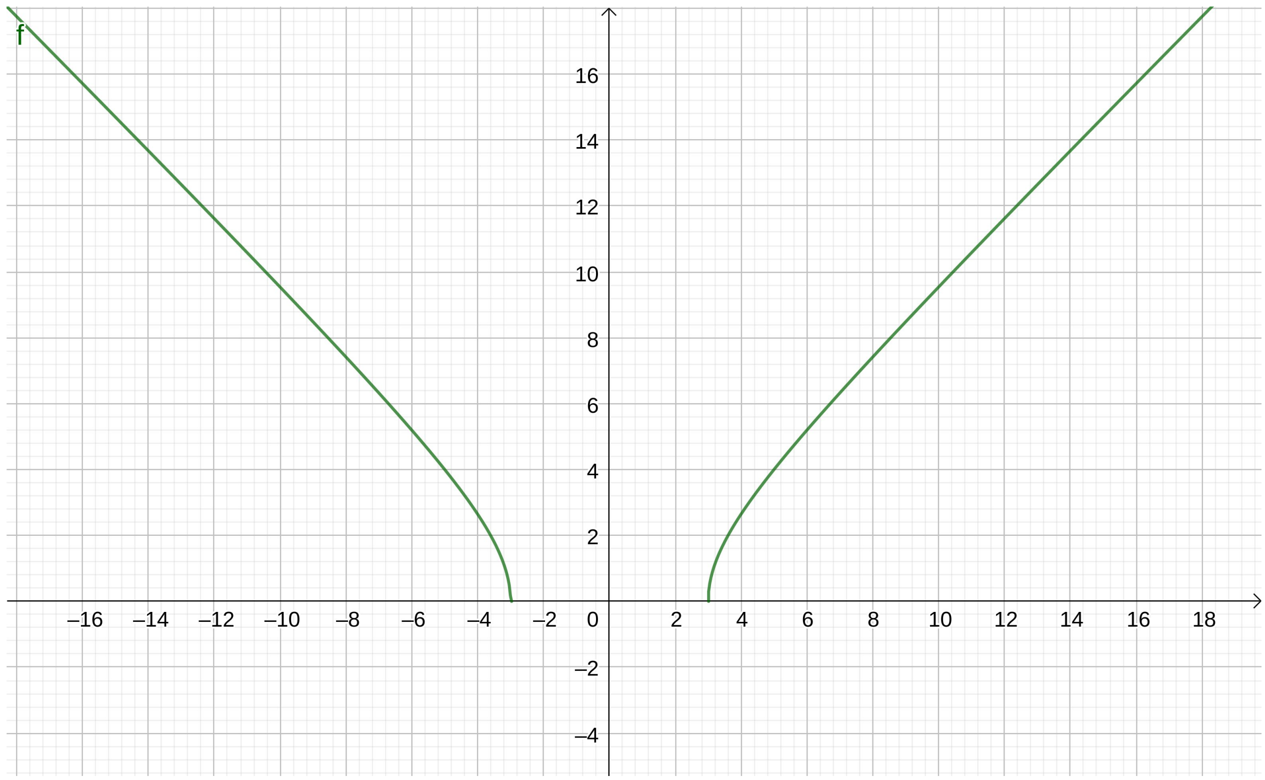
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(y^2 - 9\right)^{\frac{1}{2}} * 2y$$

$$= \frac{y}{\sqrt{y^2 - 9}}$$

$$y^2 - 9 \geq 0$$



Como (1, 4) esta en el intervalo de la región R el PVI tiene solución única.


f
16
14
12
10
8
6
4
2
–16
–14
–12
–10
–8
–6
–4
–2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
–2
–4