Apunte 37

Tercer Parcial 15 de junio. (miércoles) – 16-20 hrs.
Extraordinario 20 de junio (lunes).

Transformada de Laplace.

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

Son continuas.

Algunas ocasiones $g(t)$ (por ejemplo), podría ser una función continua en partes y periódica.

Sea $f(t)$ una función, una integral impropia sobre un intervalo no acotado se define como:

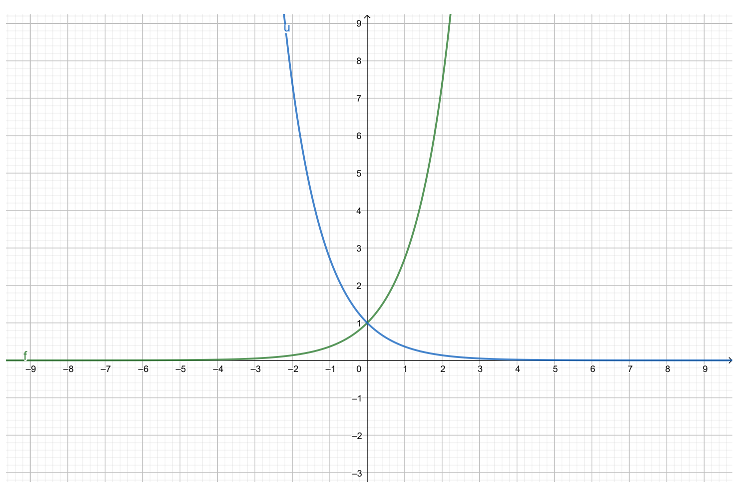
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)\,dt \qquad A > 0$$

Si la integral de a a A existe $\forall A > a$ y el limite cuando $A \to \infty$ existe, entonces la integral impropia converge.

$f(t) = e^{ct} \quad t \geq 0 \quad y \quad c \neq 0$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{ct}\,dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{cA} - 1}{c}$$

$$\lim_{A\to\infty} \frac{e^{cA} - 1}{c} = \begin{cases} \infty & c > 0 \\ & c < 0 \end{cases}$$



Si $c = 0 \qquad f(t) = 1$

$$\int_0^{+\infty} 1\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} 1\, dt = \lim_{A\to\infty} (A - 0) = \infty$$

No existe.

$$g(x) = \cos x \qquad\qquad \frac{d}{dx}\big(g(x)\big) = -\sin x$$

$$\int g(x)\, dx = \sin x + C$$

La transformada de derivación e integración tienen las propiedades de linealidad: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

$h(x, y) \quad , \quad \int_a^b h(x, y)\, dx = H(y)$

$h(x, y) \quad , \quad \int_a^b h(x, y)\, dy = \overline{H}(x)$

$h(x, y) = xy \qquad \int_0^1 xy\, dx = \frac{y}{2}$

$$\int_a^b k(s,t)\, f(t)dt \xrightarrow[\substack{transforma\ una \\ función\ f(t)}]{} F(s)$$

$$k(s,t)f(t) \xrightarrow[\int_a^b dt]{} F(s)$$

Con respecto a t

Intervalo es no acotado:

$$\int_0^{+\infty} k(s,t)\, f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} k(s,t)\, f(t)dt$$

La función $k(s,t)$ en la integral anterior se llama Kernel o núcleo de la transformada.

Si $k(s,t) = e^{-st}$ tenemos una transformada integral importante:

Definición: Transformada de Laplace:

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces decimos que la integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

Es la transformada de Laplace de f, siempre que la integral converja.

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad , \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}(1)\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^{A} e^{-st}\,dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{-sA}-1}{-s}$$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{e^{-sA}-1}{-s} = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & s>0 \to -sA<0 \to e^{-sA} \xrightarrow[A\to\infty]{} 0 \\ \begin{matrix} diverge \\ +\infty \end{matrix} & s<0 \to -sA>0 \to e^{-sA} \to \infty \end{cases}$$

$A > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = \underbrace{\frac{1}{s}}_{F(s)} \qquad cuando \qquad s>0$$

$$g(t) = t \quad , \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}t\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^{A} e^{-st}\,dt$$

$u = t \qquad\qquad du = dt$

$dv = e^{-st} \qquad v = \dfrac{e^{-st}}{-s}$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[\left.\frac{-te^{-st}}{s}\right|_0^A + \frac{1}{s}\int_0^A e^{-st}\,dt\right]$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{-Ae^{-sA}}{s} + \frac{1}{s}\int_0^A e^{-st}\,dt\right]$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{-Ae^{-sA}}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = G\underbrace{(s)}_{\frac{1}{s^2}} \qquad\qquad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \qquad s>0$$

$h(t) = e^{-3t}$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} * e^{-3t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-t(s+3)}\, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left. \frac{-e^{-t(s+3)}}{s+3} \right|_{t=0}^{t=A}$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{-e^{-A(s+3)}}{s+3} + \frac{1}{s+3} \right] = \frac{1}{s+3} = H(s)$$

$\lim_{A\to\infty} e^{-A(s+3)} = 0 \quad ssi \quad s+3 > 0 \quad ssi \quad s > -3$

$A > 0 \qquad\qquad \therefore \mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3} \qquad s > -3$

$l(t) = \sin(2t) \quad , \quad \mathcal{L}\{l(t)\} = \frac{2}{s^2 + 2^2} \qquad$ *Definición (ejercicío)*

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$\mathcal{L}$ es una transformación lineal, es decir:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\, dt$$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)\, dt$$

Siempre que ambas integrales converjan para $s > c$

$$= \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$\mathcal{L}\{1+3t\} = \mathcal{L}\{1\} + 3\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s} + 3\,\frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{1+3t\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}(1+3t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\{4e^{-3t} - 10\sin(2t)\} = 4\mathcal{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathcal{L}\{\sin(2t)\}$$

$$= \frac{4}{s+3} - \frac{10(2)}{s^2+4}$$

$$= \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\} \underset{a\,=\,2}{=} \frac{1}{s-2} \quad , \quad \mathcal{L}\{e^{-5t}\} \underset{a\,=\,-5}{=} \frac{1}{s+5}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right\} = \frac{s}{s^2+\frac{1}{4}} = \frac{4s}{4s^2+1}$$

¿Existe $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\}$?

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{t}\,dt$$

<u>Tarea</u>