Apunte 35

Ecuaciones Diferenciales con solución en serie de potencia.

Resolver:

$$(x^2+1)y''+xy'-y=0$$

- Puntos ordinarios:

$$a_2(x)=x^2+1=0$$

Raíces:

$$x=\pm i$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

- Puntos singulares:

$$x=\pm i$$

Tomando al origen:

$$x_0=0$$

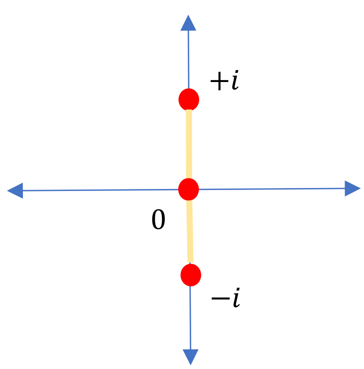
Dado que $x_0=0$ es un punto ordinario existe una solución en serie de potencia dada por:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

El objetivo es encontrar a los coeficientes, pero primero determinaremos la región de convergencia de la serie y el radio de convergencia.

Por lo tanto, converge en:

$\forall x \ \ni \ |x|<1=R$



Encontrando a los coeficientes.

Sustituyendo a la ED con la serie y sus derivadas:

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Dado que el termino está multiplicando sería igual a:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Expresando a toda la suma en serie de potencia como una sola. Por lo que las potencias deberán contener el mismo exponente, además que el índice de n deberá ser el mismo para todas.

Realizando para la segunda serie o suma el cambio de variable:

$$m = n - 2$$
$$n = m + 2$$

Para las otras 3 series, el cambio de variable será:

$$n = m$$

Por lo que quedara expresada de la forma:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)C_{m+2} x^{m} + \sum_{m=1}^{\infty} mC_m x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = 0$$

Dado que el índice más alto es 2, separamos a la serie más alta de los demás sumando obteniendo el índice 0 y 1 y después el 2, así obtenemos:

$$2C_2 + 6C_3x + C_1x - C_0 - C_1x + \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m} + \sum_{m=2}^{\infty} (m+2)(m+1)C_{m+2} x^{m}$$
$$+ \sum_{m=2}^{\infty} mC_m x^{m} - \sum_{m=2}^{\infty} C_m x^m = 0$$

Ahora reescribiendo a la serie como una sola, tendríamos:

$$(-C_0 + 2C_2) + 6C_3 + \sum_{m=2}^{\infty}[m(m-1)c_m + (m+2)(m+1)C_{m+2} + mC_m - C_m]x^m = 0$$

Como tenemos toda una sola serie evaluada en cero, por el principio de identidad cada uno de los coeficientes debe ser igual a cero.

Por lo tanto,

$$-C_0 + 2C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{C_0}{2}$$

$$6C_3 = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = 0$$

Asociando a los términos multiplicados por C_m y C_{m+2} para obtener la relación de recurrencia:

$$(m-1)(m+1)C_m + (m+2)(m+1)C_{m+2} = 0 \qquad m \geq 2$$

Obtenemos que:

$$C_2 = \frac{C_0}{2} \quad , \quad C_3 = 0$$

$$C_{m+2} = \left(\frac{1-m}{m+2}\right)C_m \qquad m = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Encontrando los coeficientes:

$m = 2$

$$C_4 = \left(\frac{-1}{4}\right)C_2 = \frac{-1}{2*4}C_0$$

$m = 3$

$$C_5 = \frac{-2}{5}C_3 = 0$$

$m = 4$

$$C_6 = \frac{-3}{6}C_4 = \frac{+3}{2*4*6}C_0$$

$m = 5$

$$C_7 = \frac{-4}{7}C_5 = 0$$

$m = 6$

$$C_8 = \frac{-5}{8}C_6 = \frac{-3*5}{2*4*6*8}C_0$$

$$C_9 = 0$$

$m = 8$

$$C_{10} = \frac{-7}{10} C_8 = \frac{3 * 5 * 7}{2 * 4 * 6 * 8 * 10} C_0$$

C_1 es independiente.

La solución:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

Sustituyendo:

$$= C_0 + C_1 x + \frac{C_0}{2} x^2 - \frac{1}{2 * 4} C_0 x^4 + \frac{3}{2 * 4 * 6} C_0 x^6 - \frac{3 * 5}{2 * 4 * 6 * 8} C_0 x^8 + \cdots$$

Asociando:

$$= C_1 x + C_0 \left[1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2 * 4} x^4 + \cdots \right]$$

La solución general es:

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

Por lo que las funciones son solución de la ecuación diferencial.

$y_1 = x$

$$(x^2 + 1) y'' + x y' - y = 0$$

$$(x^2 + 1) * 0 + x * 1 - x = 0$$

Teorema: Si x_0 es un punto ordinario de la EDO:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Que sea un punto ordinario, es decir, $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ son analíticas.

Entonces existe una solución general de la ecuación diferencial de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n = \underline{C_1}y_1(x) + \underline{C_2}y_2(x)$$

Sean las siguientes ED'S:

$$y'' + xy = 0 \qquad\qquad xy'' + y = 0$$

Tienen en común en que no existe la derivada de 1er orden, son lineales de segundo orden y tienen coeficientes variables.

Para la 1era ecuación el punto $x_0 = 0$ es un punto de tipo ordinario, entonces existe una solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

La cual converge para $|x| < R$

Para la 2da ecuación el punto $x_0 = 0$ es un punto de tipo singular. Dado que $x_0 = 0$ no es un punto ordinario encontrar una solución en serie de potencia también es posible, pero antes hay que verificar que el punto singular sea un punto regular.

Solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Soluciones en series de potencias centradas en punto singulares.

x_0 punto singular de la ED:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ldots\ldots \ (*)$$

El cual se clasifica como:

a) Punto regular.
b) Punto irregular.

Su clasificación depende de considerar la ED en forma estándar:

$$y'' + \underbrace{\frac{a_1(x)}{a_2(x)}}_{P(x)} y' + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_2(x)}}_{Q(x)} y = 0$$

Definición: Un punto singular x_0 es regular de la ED (*), si las funciones:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = (x - x_0)P(x) \\ g(x) = (x - x_0)^2 Q(x) \end{array}\right\} \textit{son analiticas en } x_0$$

Un punto singular que no es regular se llama punto IRREGULAR. Lo cual significa que para cualquiera de las dos funciones f y g o ambas no pueden ser analíticas en ese punto x_0.

Ejemplo: Sea la ED:

$$\underbrace{(x^2 - 4)^2}_{a_2(x)} y'' + \underbrace{3(x - 2)}_{a_1(x)} y' + \underbrace{5}_{a_0(x)} y = 0$$

Puntos singulares: Raíces de $a_2(x) = 0 \quad ssi \quad x = \pm 2$

Por la definición anterior, para clasificarlos, en regulares o irregulares, necesitamos escribir a la ED en forma estándar:

$$y'' + \frac{3(x - 2)}{(x^2 - 4)^2} y' + \frac{5}{(x^2 - 4)^2} y = 0$$

$$P(x) = \frac{3(x - 2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3}{(x - 2)(x + 2)^2}$$

$$Q(x) = \frac{5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{5}{(x - 2)^2(x + 2)^2}$$

$x_0 = 2$, por lo tanto, la función $f(x)$:

$$f(x) = (x-2)P(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$g(x) = (x-2)^2 Q(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$$

¿Las funciones $g(x)$ y $f(x)$ son analíticas en $x_0 = 2$?

R = Si.

$$\left.\begin{aligned} f(x) = (x-2)P(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \\ g(x) = (x-2)^2 Q(x) = \frac{5}{(x+2)^2} \end{aligned}\right\} son\ analiticas\ en\ x_0 = 2,$$

$\therefore$ $es\ un\ punto\ singular\ regular$

$x_0 = -2$, por lo tanto, la función $f(x)$:

$$f(x) = (x+2)P(x) = \frac{3}{(x-2)(x+2)} \rightarrow no\ es\ analitica\ en\ x_0 = -2$$

$$g(x) = (x+2)^2 Q(x) = \frac{5}{(x-2)^2} \rightarrow si\ lo\ es.$$

$\therefore$ $x_0 = -2$ es un punto singular irregular.

Para los puntos singular regular: Se puede dar una representación en serie de potencias centrada en ese punto, lo cual este enunciado en el siguiente teorema:

Teorema: Si $x = x_0$, el cual es un punto singular regular de la ED (*), entonces existe al menos una solución de la forma:

$$y = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^{n+r}$$

Donde r es una constante por determinar. La cual converge por lo menos en algún intervalo:

$$0 < x - x_0 < R$$

Resolver:

$$3xy'' + y' - y = 0$$

Puntos singulares:

$x_0 = 0$ es un punto singular regular. (Ejercicio).

Por Teorema anterior, entonces existe una solución de la Forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r}$$

Lo cual sus derivadas son:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2}$$

Sustituyendo:

$$3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

Reescribiendo a la serie como una sola:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(3n+3r-3) + (n+r)] C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(3n+3r-2)] C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$r(3r-2) C_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(3n+3r-2)] C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

Asociando:

$$x^r\left[r(3r-2)x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)C_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\right]=0$$

Utilizando el cambio de variable para la primera y segunda serie:

$$m=n-1$$
$$n=m+1$$
$$m=n$$

$$x^r\left[r(3r-2)x^{-1}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+1+r)(3(m+1)+3r-2)C_{m+1}x^m-\sum_{m=0}^{\infty}C_mx^m\right]=0$$

$$x^r\left[r(3r-2)x^{-1}+\sum_{m=0}^{\infty}[(m+1+r)(3m+3r+1)C_{m+1}-C_m]\,x^m\right]=0$$

Obteniendo el primer coeficiente:

$$r(3r-2)=0$$

Y la relación de recurrencia:

$$(m+1+r)(3m+3r+1)C_{m+1}-C_m=0 \qquad m=0,1,2,3,4,5\ldots$$

Los posibles valores para r:

$$r=0\ \ ,\ \ r=\frac{2}{3}$$

La relación de recurrencia:

$$C_{m+1}=\frac{C_m}{(m+1+r)(3m+3r+1)}\quad m=0,1,2,3\ldots$$

Dado que hay dos posibles valores para r podemos obtener dos relaciones de recurrencia.

Si $r=0$

$$C_{m+1}=\frac{C_m}{(m+1)(3m+1)}\qquad m=0,1,2,\ldots$$

Si $r=\frac{2}{3}$

$$C_{m+1}=\frac{C_m}{\left(m+\frac{2}{3}+1\right)(3m+2+1)}$$

$$=\frac{C_m}{\left(m+\frac{5}{3}\right)3(m+1)}$$

$$=\frac{C_m}{(3m+5)(m+1)}\qquad m=0,1,2,\ldots$$

Encontrar para cada relación los coeficientes. (Ejercicio)

$$r=0\quad,\quad r=\frac{2}{3}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}\quad,\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

$$y=Ay_1+By_2$$

De esta forma se podrá encontrar las soluciones para Ecuaciones Diferenciales centradas en puntos singulares regular.

Encontrando los coeficientes:

$r(3r-2)=0 \qquad\qquad C_{m+1}=\dfrac{C_m}{(m+1+r)(3m+3r+1)} \quad m=0,1,2,3\ldots$

Si $r=0$

$$C_{m+1}=\frac{C_m}{(m+1)(3m+1)} \qquad m=0,1,2,\ldots$$

$m=0$

$$C_1=\frac{C_0}{1*1}$$

$m=1$

$$C_2=\frac{C_1}{2*4}=\frac{C_0}{2*4*1*1}$$

$m=2$

$$C_3=\frac{C_2}{3*7}=\frac{C_0}{3!\,1*4*7}$$

$m=3$

$$C_4=\frac{C_3}{4*10}=\frac{C_0}{4!\,1*4*7*10}$$

$m=4$

$$C_5=\frac{C_4}{5*13}=\frac{C_0}{5!\,1*4*7*10*13}$$

$m=5$

$$C_6=\frac{C_5}{6*16}=\frac{C_0}{6!\,1*4*7*10*13*16}$$

$m=6$

$$C_7=\frac{C_6}{7*19}=\frac{C_0}{7!\,1*4*7*10*13*16*19}$$

Por lo que la relación sería igual a:

$$C_n=\frac{C_0}{n!\,1*4*7\ldots(3n-2)}$$

$$\forall n=1,2,\ldots\infty$$

La solución:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_0}{n!\,1*4*7\ldots(3n-2)}x^{n+0}$$

Si $r = \frac{2}{3}$

$$C_{m+1} = \frac{C_m}{(3m+5)(m+1)} \qquad m = 0,1,2,\dots$$

$m = 0$

$$C_1 = \frac{C_0}{5*1}$$

$m = 1$

$$C_2 = \frac{C_1}{8*2} = \frac{C_0}{2*5*8}$$

$m = 2$

$$C_3 = \frac{C_2}{11*3} = \frac{C_0}{3!\,5*8*11}$$

$m = 3$

$$C_4 = \frac{C_3}{14*4} = \frac{C_0}{4!\,5*8*11*14}$$

$m = 4$

$$C_5 = \frac{C_4}{17*5} = \frac{C_0}{5!\,5*8*11*14*17}$$

Por lo que la relación sería igual a:

$$C_n = \frac{C_0}{n!\,5*8*11\dots(3n+2)}$$

$$\forall n = 1,2,\dots\infty$$

La solución general con $r = \frac{2}{3}$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{n!\,5*8*11\dots(3n+2)} x^{n+\frac{2}{3}}$$

$$y_1 = x^0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \qquad x^n}{n!\,1*4\dots\dots(3n-2)}\right]$$

$$y_2 = x^{\frac{2}{3}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \qquad x^n}{n!\,5*8*11\dots\dots(3n+2)}\right]$$

Son solución de la ED

Ninguna de estas dos funciones es múltiplo constante de la otra, por lo tanto, $\{y_1, y_2\}$ son l.i.

$$y = \underbrace{C_1}_{C_0} y_1 + \underbrace{C_2}_{C_0} y_2$$

Es una solución también por l.i.

La región de convergencia de las funciones:

$$|x| < \infty$$