Apunte 34

Ecuaciones Diferenciales de segundo orden con coeficientes variables.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \dots (1)$$

Forma estándar:

$$y'' + \underbrace{\frac{a_1(x)}{a_2(x)}}_{P(x)} y' + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_2(x)}}_{Q(x)} y = 0 \qquad a_2(x) \neq 0$$

x_0 es un punto ordinario de (1) cuando $P(x), Q(x)$ son analíticas en ese punto x_0. En caso contrario si no es un punto ordinario, decimos que es un punto singular.

Suponiendo que $a_2(x), a_1(x)$ y $a_0(x)$ son polinomios los cuales $\forall x \in \mathbb{R}$ son funciones analíticas.

Suponiendo que los polinomios $a_1(x), a_2(x), a_0(x)$ no tienen factores en común.

¿En qué punto las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas?

R = Son analíticas $\forall x \ni a_2(x) \neq 0$

$x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación (1), si la función $a_2(x_0) \neq 0$.

$x = x_0$ es un punto singular de la ecuación (1), si $a_2(x_0) = 0$.

Identificar quienes son los puntos analíticos y singulares de las siguientes ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones de Cauchy – Euler de orden 2.

Ejemplo 1:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Observamos que los coeficientes de la ecuación diferencial son polinomios:

$$\underbrace{ax^2}_{a_2(x)}\, y'' + \underbrace{bx}_{a_1(x)}\, y' + \underbrace{c}_{a_0(x)}\, y = 0$$

Puntos analíticos u ordinarios:

$$\forall x \neq 0$$

Puntos singulares:

$$\forall x = 0$$

Ejemplo 2:

Consideramos el siguiente polinomio:

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$$

Puntos ordinarios:

$$\forall x \neq \pm 1$$

Puntos singulares:

$$\forall x = \pm 1$$

Los puntos singulares no necesariamente deben ser número reales.

Por ejemplo, si consideramos la siguiente ecuación diferencial.

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$$

Puntos ordinarios:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Puntos singulares:

$$\forall x = \pm i$$

El siguiente Teorema garantiza la existencia de soluciones en series de potencias.

Teorema: Existencia de soluciones en serie de potencias.

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial ED:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Tomando un punto ordinario de la ED, siempre es posible encontrar 2 soluciones l.i. (linealmente independientes) en la forma de una serie de potencias centrada en el punto x_0 (el cual es ordinario), es decir, la <u>solución de la ecuación diferencial será de la forma</u>:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$$

El objetivo será determinar quien es la serie de potencias que satisface la ecuación diferencial. Similar al método de coeficientes indeterminados, lo cual será encontrar los coeficientes de la serie centrada en el punto ordinario y que satisface a la ecuación diferencial.

Como la solución es una serie de potencias, necesitamos encontrar el Intervalo de convergencia y el Radio de convergencia.

Por lo tanto, una solución en serie de potencias converge por lo menos en un intervalo definido por:

$|x\_x_0| < R$, donde R es la distancia desde x_0 al punto singular más cercano.

Forma de determinar el Radio de convergencia.

Sea la ecuación de Cauchy – Euler.

$$ax^2y'' + bxy + cy = 0$$

Sabemos que sus puntos ordinarios son todos los números reales diferentes de cero.

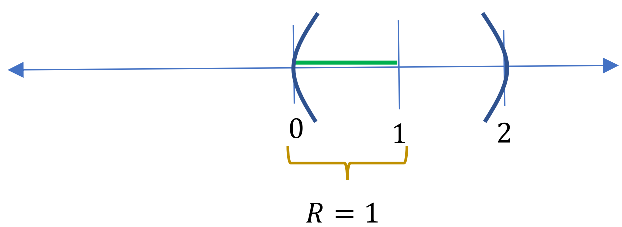
Por lo que sí:

$x_0 = 1$ es un punto ordinario, dado el Teorema anterior, entonces existe una serie centrada en 1 de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-1)^n$$

La cual es solución de la ED y converge al menos en el intervalo:

Punto singular: $x = 0$
Punto ordinario tomado: $x = 1$



Por lo que converge al menos en el intervalo:

$$|x-1| < 1 \quad ssi \quad 0 < x < 2$$

Aún no hemos encontrado la serie de potencias en forma explícita.

Suponiendo que tenemos la ecuación diferencial:

$$(x^2 - 2x + 5)y'' + xy' - y = 0$$

La función:

$$a_2(x) = x^2 - 2x + 5 = 0$$

¿Es igual a cero en que puntos?

Utilizando la Fórmula general:

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Puntos singulares:

$$x = 1 \pm 2i$$

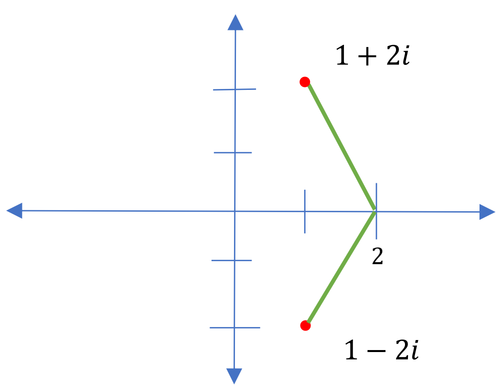
Puntos ordinarios:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces $x_0 = 2$ es un punto ordinario, por lo que existe:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - 2)^n$$

La cual converge al menos en el intervalo:



$$|x - 2| < R = \sqrt{5}$$

$$R = |1 + 2i - 2| = |-1 + i2| = \sqrt{5}$$

Resolver ecuaciones diferenciales encontrando la solución en series de potencias.

Ejemplo 1:

Considerando la siguiente ecuación diferencial ED:

$$y'' + y = 0 \qquad -\infty < x < +\infty$$

Las funciones:

$$P(x) = 0 \ \ , \ \ Q(x) = 1$$

En particular, esta ecuación diferencial tiene como puntos ordinarios al conjunto:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, no hay puntos singulares.

Considerando como punto ordinario a:

$$x_0 = 0$$

Entonces existe una función expresada de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

La cual es solución de la ecuación diferencial.

Encontrando los coeficientes:

Sustituir las derivadas de la función dada anteriormente expresada en forma de serie de potencias. Por lo que obtenemos lo siguiente:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

Sustituyendo en la ED:

$$y'' + y = 0$$

$$y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Combinando las dos series anteriores, para hacerla como una sola suma. Dado que no se puede realizar la suma como tal, necesitamos un corrimiento de índices, donde el termino n deberá iniciar en el mismo valor y el termino de la potencia de x, deberá ser el mismo para ambas.

Utilizando un cambio de variable a la primera serie $n = 2$, para convertirla en un índice que comience desde cero. Y la potencia como el valor de m.

$$m = n - 2$$
$$n = m + 2$$
$$m = n$$

Obtenemos que:

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)C_{m+2}x^m + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = 0$$

Reescribiendo la serie en términos de una sola serie.

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+1)C_{m+2} + C_m]x^m = 0$$

Dado que la serie esta igualada a cero. Por el principio de identidad, los coeficientes deberán ser igual a 0.

$$\forall x$$

En otras palabras, tendríamos que:

$$(m+2)(m+1)C_{m+2} + C_m = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Esta ecuación se llama: <u>Relación de recurrencia</u>.

Porque obtendríamos el valor de los coeficientes.

$$C_{m+2} = \frac{-C_m}{(m+2)(m+1)}$$

A partir de esta relación obtendríamos el valor de los coeficientes.

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$

$$(C_0, C_1, C_2, \dots,)$$

Calculando los primeros coeficientes si:

$m = 0$

$$C_2 = \frac{-C_0}{2*1}$$

$m = 1$

$$C_3 = \frac{-C_1}{3*2}$$

$m = 2$

$$C_4 = \frac{-C_2}{4*3} = \frac{C_0}{4*3*2*1}$$

$m = 3$

$$C_5 = \frac{-C_3}{5*4} = \frac{C_1}{5*4*3*2}$$

$m = 4$

$$C_6 = \frac{-C_4}{6*5} = \frac{-C_0}{6!}$$

$m = 5$

$$C_7 = \frac{-C_5}{7*6} = \frac{-C_1}{7!}$$

Encontrando las relaciones:

Para los coeficientes pares:

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m C_0}{(2m)!} \quad , \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Para los coeficientes impares:

$$C_{2m+1} = \frac{(-1)^m C_1}{(2m+1)!} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Por lo tanto, deducimos que:

$$y = C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2!}x^2 - \frac{C_1}{3!}x^3 + \frac{C_0}{4!}x^4 + \frac{C_1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n C_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

Asociando todos los términos que dependen de C_0 y C_1.

$$= C_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right] + C_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots\right]$$

La solución de la ED de orden 2. Dada la formula general:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes.

En este caso las 2 soluciones en serie de potencias lo cual serian igual a:

$$= C_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

Donde las series juegan el papel de y_1 y y_2.

Las funciones centradas en 0 y 1 representada como una serie de potencias serian:

$$= C_0 \cos x + C_1 \sin x$$

Si resolvemos la ED con coeficientes constantes, encontrado el polinomio característico y llegando a que la solución es la anterior.

La solución anterior en series de potencias converge en el intervalo de convergencia:

$$|x - 0| < R = \infty$$

No siempre será posible encontrar una formula para los coeficientes, en algunas ocasiones solo se presentará la serie de forma general.

Ejemplo 2:

Suponiendo que queremos resolver la ED:

$$y'' + xy = 0$$

Puntos ordinarios:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Puntos singulares:

No hay puntos singulares

Tomando el punto ordinario:

$$x_0 = 0$$

Dado que el Teorema garantiza dos soluciones en serie de potencias con centro $x_0 = 0$, dado que no hay puntos singulares el radio de convergencia será infinito, por lo tanto, serán convergentes en el intervalo: $|x| < \infty$.

Proponemos que la función solución es de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Hallando la derivada de la función solución:

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

Sustituyendo:

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Observamos que en el segundo sumando cada termino esta multiplicado por x.

Entonces reescribiendo esto sería igual a:

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0$$

Al realizar la suma de las 2 series, tenemos que una serie inicia en $n = 2$ y otra en $n = 0$, además que las potencias de x una es x^{n-2} y otra es x^{n+1}, por lo que necesitamos hacer un corrimiento de índices.

¿Para este ejemplo seria conveniente usar el corrimiento de índices o quitar una de las 2 series algunos de los sumandos?

R = En este caso lo ideal sería quitar de la primera serie al primer sumando, para que las dos series inicien en la misma potencia de x.

Entonces:

$$n = 2$$

$$= 2(2-1)C_2 x^{2-2} = 2C_2 * 1 = 2 * 1C_2$$

$$= 2 * 1C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0$$

Haciendo el corrimiento de índices.

Utilizando el cambio de variable:

$$m = n - 2 \;\; , \;\; m = n + 1$$
$$n = m + 2 \;\; , \;\; n = m - 1$$
$$n = m \;\; , \;\; n = m$$

$$= 2C_2 + \sum_{m=1}^{\infty} (m+2)(m+1)C_{m+2} x^m + \sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1} x^m = 0$$

Dado que ambas series inician en el mismo índice y potencia.

Obtenemos una sola serie de la forma:

$$= 2C_2 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+2)(m+1)C_{m+2} + C_{m-1}]x^m = 0$$

Por lo que obtenemos de nuevo una serie evaluada en 0. Entonces utilizamos la propiedad de identidad. Para que esta serie sea igual a cero, necesitamos que todos los coeficientes de la serie se igualen a cero.

Así,

$$2C_2 = 0 \qquad (m+2)(m+1)C_{m+2} + C_{m-1} = 0$$

La identidad o formula de recurrencia es:

$$(m+2)(m+1)C_{m+2} + C_{m-1} = 0$$

De la primera igualdad tenemos que:

$$C_2 = 0$$

De la segunda igualdad tenemos que:

$$C_{m+2} = \frac{-C_{m-1}}{(m+2)(m+1)} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Calculando los primeros coeficientes si:

$m = 1$

$$C_3 = \frac{-C_0}{3 * 2}$$

$m = 2$

$$C_4 = \frac{-C_1}{4 * 3}$$

$m = 3$

$$C_5 = \frac{-C_2}{5 * 4} = 0$$

$m = 4$

$$C_6 = \frac{-C_3}{6 * 5} = \frac{C_0}{6 * 5 * 3 * 2}$$

$m = 5$

$$C_7 = \frac{-C_4}{7*6} = \frac{C_1}{7*6*4*3}$$

$m = 6$

$$C_8 = \frac{-C_5}{8*7} = 0$$

$C_9 = \frac{C_0}{\dots}$ $\quad C_{10} = \frac{C_1}{\dots}$ $\quad C_{11} = 0$

Encontrando la relación:

$C_{m+3} = 0$

$C_{3m} = 0$

Si $m = 5$

$$C_8 = 0$$
$$C_{15} = 0$$

En este caso la formula no se ha determinado como tal, por lo que la solución general seria de la forma:

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots$$

Sustituyendo los coeficientes encontrados:

$$= C_0 + C_1x + 0*x^2 - \frac{C_0}{3*2}x^3 - \frac{C_1}{4*3}x^4 + 0*x^5 + \frac{C_0}{6*5*3*2}x^6 + \frac{C_1}{7*6*4*3}x^7 + \cdots$$

Asociando para C_0 y C_1.

$$= C_0\left[1 - \frac{x^3}{3*2} + \frac{x^6}{6*5*3*2} + \cdots\right] + C_1\left[x - \frac{x^4}{3*4} + \frac{x^7}{7*6*4*3} + \cdots\right]$$

Dado que tenemos una ED de segundo orden la solución general sería de la forma:

$$= C_0y_1(x) + C_1y_2(x)$$