Apunte 33

Serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$$

Ejemplo 1:

Teniendo la siguiente serie de potencias, donde el índice es igual a 2:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^n$$

Escribir la serie en n=2, a partir del índice m=0.

Haciendo un cambio de variable:

$$m = n - 2$$

$$n = 2 \rightarrow m = 0$$

$$n \rightarrow \infty \rightarrow m \rightarrow \infty$$

$$m = n - 2 \quad , \quad n = m + 2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(x-x_0)^{m+2}$$

$$m = n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(x-x_0)^{n+2}$$

Ejemplo 2:

Consideramos la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

Escribir la serie de potencias anterior, donde el valor genérico $x-x_0$ tenga exponente n y no el exponente $n-2$.

Haciendo un cambio de variable:

$$m = n-2$$
$$n = m+2$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(m+4)(m+3)a_{m+2}(x-x_0)^{m}$$

Dado que los índices son equivalentes, podemos expresar la serie en términos de n:

$$m = n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+2}(x-x_0)^{n}$$

Ejemplo 3:

Consideramos la siguiente serie:

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}$$

Escribir la serie anterior donde el exponente de x^{r+n-1} sea igual a x^{r+n}. Como cada uno de los términos de la serie está afectado por el x^2, la serie es equivalente a:

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n+1}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$m = n + 1$$
$$n = m - 1$$

$$x^{r+n+1} = x^{r+m}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n\, x^{r+n+1} = \sum_{m=1}^{\infty}(r+m-1)a_{m-1}x^{r+m}$$

Reescribimos a nuestra serie porque queremos resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes no constantes, entonces sus soluciones estarán dadas en términos de funciones expresadas en series de potencias.

Ejemplo 4:

Suponiendo que tenemos dos series:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$$

Donde una el exponente de x es x^{n-2} y la otra su exponente es x^{n+1}. Observando la primera serie inicia en $n = 2$ y la segunda en $n = 0$, por lo que estas dos series expresadas de esa forma, la suma de ellas seria:

Aritmética de serie de potencias: Debe iniciar en el mismo numero natural. El exponente de x debe ser el mismo, para únicamente sumar los coeficientes.

Dado que en ninguna de las dos series se satisface dichos términos, realizaremos un cambio de variable, para realizar el corrimiento de las series.

Desarrollando las series:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} = 2*1C_2x^0 + 3*2C_3x + 4*3C_4x^2 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = C_0x + C_1x^2 + C_2x^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 2C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$$

Ahora ambas series el primer sumando es x, y por lo tanto con estas dos sumas realizaremos un corrimiento de índice, un cambio de variable en cada una de manera que ambos exponentes de x sean n.

$$= 2C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$$

En la primera serie, el cambio de variable seria:

$$m = n - 2 \quad , \quad n = m + 2$$

En la segunda serie, el cambio de variable seria:

$$m = n + 1 \quad , \quad n = m - 1$$

Por lo que obtendríamos:

$$= 2C_2 + \sum_{m=1}^{\infty} m + 2(m+1)C_{m+2} x^m + \sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1} x^m$$

Ahora vemos que ambas series inician ahora como $m = 1$, y las potencias x^m tiene el mismo exponente.

Factorizando los coeficientes de la serie:

$$= 2C_2 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+2)(m+1)C_{m+2} + C_{m-1}]x^m$$

Soluciones en Serie de Potencias.

Suponiendo una ecuación diferencial de segundo orden.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ldots (1)$$

Es lineal pero sus coeficientes no son constantes.

En forma estándar:

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0 \qquad a_2(x) \neq 0$$

Reescribiendo de la siguiente forma:

$$y'' + P(x)y' + Q'(x)y = 0 \ldots (2)$$

Procederemos a resolver ecuaciones diferenciales en forma estándar, donde los coeficientes ahora no son puntos singulares.

Definición: Decimos que un punto x_0 es un punto ordinario de la ED (1) si las funciones $P(x), Q(x)$ son analíticas en x_0.

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

Significa que las funciones P(x) y Q(x), podemos expresarlas como una serie de potencias centrada en ese punto. Donde x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (1). Un punto que no es ordinario es un punto singular de la ecuación diferencial.

Un punto que no es un punto ordinario es un PUNTO SINGULAR de la ED.

Por ejemplo:

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ED:

$$y'' + e^x y' + \sin x \, y = 0$$

$$P(x) = e^x \quad , \quad Q(x) = \sin x$$

¿El punto x_0 es un punto ordinario?

A la función $P(x)$, se puede expresar como una serie de potencias centrada en 0?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

A la función $Q(x)$, se puede expresar como una serie de potencias centrada en 0?

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ambas series las puedo expresar en series de potencias, por lo tanto, sí.

A partir de la serie de Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^{(n)}|_{x=0} x^n}{n!} \quad , \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left((\sin x)^{(n)}\right)_{x=0} x^n}{n!}$$

Por lo que si es un punto ordinario.

Ejemplo 2:

$$y'' + e^x y' + \ln x \, y = 0$$

¿$x_0 = 0$ es un punto ordinario?

$x_0 = 0$, es un punto singular, la función logaritmo de x no es continua en 0, al no ser continua, no es derivable en ese punto.

Ejemplo 3:

$$y'' + \cos x \, y' + \frac{1}{x} y = 0$$

La función $\frac{1}{x}$ no es continua en 0.

$\therefore x_0 = 0$ es un punto singular.

s

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Coeficientes de la ED son polinomios.

$P(x) = x^2 + 2x + 1$ es analítica $\forall x$.

$$x_0 = 1$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-1)^n \quad , \quad C_n = \frac{P^{(n)}(1)}{n!} \quad \forall n$$

$P(1) = 4 = C_0$
$P'(1) = 4 = C_1$
$P'(1) = 2 = C_2$
$P^{(n)}(1) = 0 \quad \forall n \geq 3$

$$= 4(x-1)^0 + 4(x-1)^1 + 2(x-1)^2 + 0 + \cdots$$

Un polinomio es analítico $\forall x$.

Función racional.

$$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)} \qquad p, q \rightarrow polinomios.$$

f es analítica $\forall x \ni q(x) \neq 0$

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ldots (1)$$

$$y'' + \underbrace{\frac{a_1(x)}{a_2(x)}}_{P(x)} y' + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_2(x)}}_{Q(x)} y = 0$$

$P(x), Q(x)$ son analíticas excepto donde $a_2(x) = 0$

$x = x_0$ es un punto ordinario de (1) si $a_2(x_0) \neq 0$
$x = x_0$ es un punto singular de (1) si $a_2(x_0) = 0$

Ecuación de Bessel.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v)y = 0$$

v es una constante

- Puntos ordinarios $x \neq 0$
- Puntos singulares $x = 0$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

α es una constante.

- Puntos ordinarios $x \neq \pm 1$
- Puntos singulares $x = \pm 1$

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

- Puntos ordinarios $x \neq 0$
- Puntos singulares $x = 0$

$$(x^2 + 1)y'' + xy' + y = 0$$

- Puntos ordinarios $\forall x \in \mathbb{R}$
- Puntos singulares $x = \pm i$

Teorema: Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ED:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Siempre es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes en la forma de una serie de potencias centrada en x_0, es decir,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$$

Esta serie converge por lo menos en intervalo definido por $|x - x_0| < R$ donde R es la distancia desde x_0 al punto singular más cercano.

Ejemplo 1:

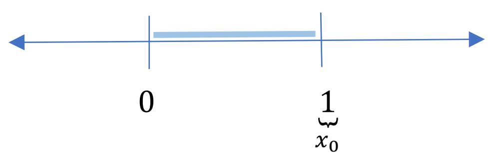
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v)y = 0$$

$x_0 = 1$ es un punto ordinario de la ED, entonces por el <u>Teorema</u> anterior existe una solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-1)^n$$

Punto singular $x = 0$

Converge por lo menos en un intervalo definido por $|x - 1| < 1$



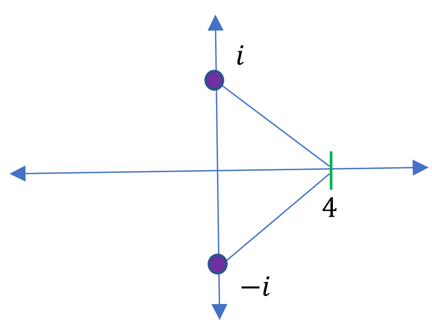
$$\forall x \in (0, 2)$$

Ejemplo 2:

$$(x^2 + 1)y'' + xy' + y = 0$$

$x_0 = 4$, entonces existe una solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-4)^n$$



La cual converge $\forall x \ \ |x - 4| < \sqrt{17}$

$x = \pm i$ son puntos singulares de la ED.

$$|4 - i| = \sqrt{17}$$
$$|4 + i| = \sqrt{17}$$

$$|4 - i| = \sqrt{16 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$
$$I_m(4 - i) = -1$$

Resolver:

$$y'' + y = 0$$

$a_2 = a_0 = 1$, $a_1 = 0$ todo punto es ordinario en particular $x_0 = 0$, entonces existe una solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

La cual converge para $|x - 0| = |x| < R = \infty$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

$$y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$m = n - 2$$
$$n = m + 2$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)C_{m+2} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = 0$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+1)C_{m+2} + C_m] x^m = 0$$

$$\rightarrow (m+2)(m+1)C_{m+2} + C_m = 0 \quad \forall m \geq 0$$

Relación de recurrencia:

$$C_{m+2} = \frac{-C_m}{(m+2)(m+1)} \quad \forall m \geq 0$$

$$m = 0$$

$$C_2 = \frac{-C_0}{2 * 1}$$

$$m = 1$$

$$C_3 = \frac{-C_1}{3 * 2}$$

$$m = 2$$

$$C_4 = \frac{-C_2}{4 * 3} = \frac{C_0}{4 * 3 * 2 * 1} = \frac{C_0}{4!}$$

$$m = 3$$

$$C_5 = \frac{-C_3}{7 * 6} = \frac{+C_1}{7 * 6 * 3 * 2}$$

Deducimos que

Ejercicio: Encontrar una formula para todos los coeficientes pares e impares.