

## Apunte 32

Determinar el radio de convergencia  $R$  y el intervalo de convergencia  $I$  de la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k} (x-5)^k$$

Serie de potencias centrado en  $a = 5$ ,  $C_k = \frac{(-1)^k}{10^k} \neq 0 \forall k$

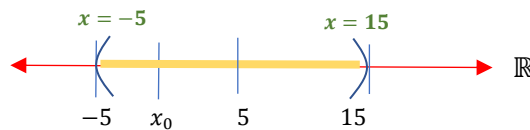
**Criterio de la región:**

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{10^{k+1}} (x-5)^{k+1}}{\frac{(-1)^k}{10^k} (x-5)^k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} 10^k (x-5)^{k+1}}{(-1)^k 10^{k+1} (x-5)^k} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{-1(x-5)}{10} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{-1}{10} \right| |x-5| = \frac{1}{10} \lim_{k \rightarrow \infty} (x-5) = \frac{|x-5|}{10} = L \end{aligned}$$

$$\frac{|x-5|}{10} = L < 1 \quad \text{ssi} \quad |x-5| < 10 = R$$

La serie es absolutamente convergente  $\forall x \ni |x-5| < 10$ , entonces también es convergente.

$$\begin{aligned} |x-5| < 10 \quad \text{ssi} \quad -10 < x-5 < 10 \quad I = (-5, 15) \\ -5 < x < 15 \end{aligned}$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{10^k} (x_0 - 5)^k = a_0 \in \mathbb{R}$$

La serie diverge en  $(-\infty, -5) \cup (15, +\infty)$ , es decir,  $(x-5) > 10$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n$$

Su radio de convergencia es  $R > 0$ , entonces el intervalo de convergencia  $I = (a - R, a + R)$

Definimos  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n \quad \forall x \in I = (a - R, a + R)$

Entonces:  $f$  es continua, derivable e integrable en  $I$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (C_n (x - a)^n) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n * n (x - a)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x - a)^{n-1} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) C_n (x - a)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n (x - a)^{n-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) C_n (x - a)^{n-3}$$

$$\int f(x) dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n dx \quad \forall x \in I$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int C_n (x - a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{C_n (x - a)^{n+1}}{n+1} + C \right)$$

Nota: Las derivadas de todos los órdenes para  $f$  tienen el mismo radio e intervalo de convergencia  $R > 0 \quad I = (a - R, a + R)$

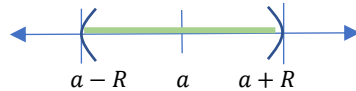
Lo mismo se satisface cuando integramos.

### Propiedad de identidad.

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = 0, \quad R > 0 \quad I = (a-R, a+R) \quad \forall x \in I$$

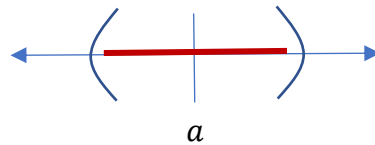
Entonces  $C_n = 0 \quad \forall n$ .



Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \quad \forall x$$

En algún intervalo abierto con centro en a.



Entonces:

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

Son convergentes en  $I = (R-a, R+a) \quad R > 0$

**Suma y resta:**

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n$$

Converge al menos  $\forall x \in I = (R-a, R+a)$

**Multiplicación:**

$$f(x)g(x) = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$$

$$C_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n \quad C_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$$

$$C_0 = a_0b_0$$

$$C_1 = a_0b_1 + a_1b_0$$

$$C_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$$

Esta serie converge al menos  $\forall x \in I = (R-a, R+a)$

**División:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n \quad \text{¿} \forall x \in I = (R-a, R+a)?$$

$$x = a \quad g(a) = 0$$

$$g(a) \neq 0$$

**Definición:** Una función  $f$  es analítica en un punto  $a$  si se puede representar mediante una serie de potencias en  $x - a$  con un radio  $R > 0$  o infinito de convergencia.

$$f(x) = e^x$$

¿  $f$  es analítica en  $x = 0$  ?

**Tarea:** Investigar el Teorema de Taylor.

Una función  $f$  que tiene una expansión en serie de Taylor alrededor del punto  $x = a$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

∴  $e^x$  es analítica en  $x = 0$

¿  $g(x) = \sin x$  es analítica en  $x = 0$  ?

SI

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{0}{0!} x^0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{0}{6!} x^6 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$C_{2n-1} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$g(0) = 0, \quad g''(0) = 0, \quad g^{(N)}(0) = 0$$

$$g'(0) = 1, \quad g'''(0) = -1, \quad g^{(v)}(0) = 1$$

**Corrimiento del índice de la suma:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = (*)$$

Objetivo: Expresar a la suma anterior como una sola serie de potencias cuyo termino general sea  $x^k$ .

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} = 2 * 1C_2 x^0 + 3(2)C_3 x + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = C_0 x + C_1 x^2 + \dots$$

$$(*) = 2 * 1C_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1} x^k$$

$$= 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k-1}] x^k$$

$k = n - 2$ $n = 3, k = 1, n = k + 2$	$k = n + 1$ $n = 0, k = 1, n = k - 1$
--	--

$$= 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1} x^k$$

$$= 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k-1}] x^k$$