

## Apunte 31

S

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

$$y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} \quad x > 0$$

S

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$am^2 + bm + c = 0$$

$$y = C_1e^{m_1} + C_2e^{m_2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g_1(x) \quad , \quad ay'' + by' + cy = g_2(x)$$

Variación de parámetros.

Coeficientes indeterminados

ó

variación de parámetros

Cambio de variable:

$$x = e^t \quad \text{o} \quad t = \ln x$$

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g_1(x) \quad \rightarrow \quad ay'' + by' + cy = \widetilde{g}_1(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

### Ejemplo:

Dado lo siguiente:

$$x = e^t \quad \text{o} \quad t = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} * \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$$

$$x^2 \left[ \frac{1}{x^2} \left[ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] \right] - 3x \left[ \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right] + 13y = 4 + 3e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + 13y = 4 + 3e^t$$

Calcular  $y_c$

$$m^2 - 4m + 13 = 0$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(13)}}{2} = \frac{4 \pm 3i}{2}$$

$$m_1 = 2 + 3i$$

$$m_2 = 2 - 3i$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3$$

$$y_c = C_1 e^{2t} \cos(3t) + C_2 e^{2t} \sin(3t)$$

Calcular  $y_p$

$$g(t) = 4 + 3e^t, \quad y_p = A + Be^t$$

$$y_p' = Be^t = y_p''$$

$$y_p'' - 4y_p' + 13y_p = 4 + 3e^t$$

$$-3Be^t + 13A + 13Be^t = 4 + 3e^t$$

$$13A + 10Be^t = 4 + 3e^t$$

$$A = \frac{4}{13}, \quad B = \frac{3}{10}$$

$$y_p = A + Be^t$$

$$y_p = \frac{4}{13} + \frac{3}{10}e^t$$

Sol. General:

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 e^{2t} \cos(3t) + C_2 e^{2t} \sin(3t) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}e^t$$

Sol. General de la ecc. De Cauchy:

$$x = e^t, \quad t = \ln x$$

$$y(x) = C_1 e^{2 \ln x} \cos(3 \ln x) + C_2 e^{2 \ln x} \sin(3 \ln x) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$$

$$y(x) = C_1 x^2 \cos(3 \ln x) + C_2 x^2 \sin(3 \ln x) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$$

**Serie de potencias centrada en a:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n$$

Si  $x = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n 0^n = 0$$

La serie es convergente si la sucesión de sumas parciales  $\{S_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$  es convergente.

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N C_n (x - a)^n \rightarrow L \quad N \rightarrow \infty$$

**Ejemplo:**

Considerar la serie siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x + 2)^n$$

La serie está centrada en:

$$a = -2$$

Su sucesión de sumas parciales es:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N (x + 2)^n$$

Por ejemplo, el primer término (un conjunto infinito), de la sucesión es:

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^1 (x + 2)^n$$

El segundo termino:

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^2 (x+2)^n, \dots,$$

Y así sucesivamente...

Si la serie no es convergente, entonces para este "x", la cual es fija, decimos que la serie es divergente.

¿Para qué valores de x, esta serie es convergente?

Intervalo de convergencia.

$$x = -2$$

La serie es convergente en ese intervalo.

### **Intervalo de convergencia.**

Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia. El intervalo de convergencia es el conjunto de todos los números reales x para los que converge la serie.

### **Radio de convergencia.**

Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia R.

- Si  $R > 0$ , entonces la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$$

converge para:

$$|x-a| < R$$

y diverge para:

$$|x-a| > R$$

- Si la serie converge solo en su centro  $a$ , entonces  $R = 0$ .
- Si la serie converge  $\forall x \in \mathbb{R}$ , entonces  $R = \infty$ .

$$|x - a| < R$$

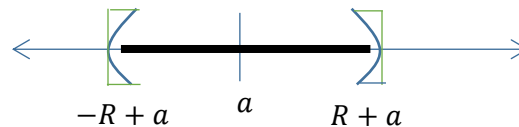
Es equivalente a:

$$\begin{aligned} -R < x - a < R \\ -R + a < x < R + a \end{aligned}$$

Una serie de potencias converge en el intervalo con extremos:

$$\begin{aligned} -R + a \\ R + a \end{aligned}$$

Podría converger o no en los puntos extremos.



### Convergencia absoluta.

Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge absolutamente, en otras palabras, si:

$$x \in (-R + a, R + a)$$

Entonces la serie de valores absolutas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(x - a)^n| \quad \text{converge}$$

### Criterio de la región:

La convergencia de una serie de potencias suele determinarse mediante el criterio de la región.

Supongamos que  $C_n \neq 0 \quad \forall n$  y que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}(x - a)^{n+1}}{C_n(x - a)^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} (x - a) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x - a| \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x - a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = L \end{aligned}$$

i) Si  $L < 1$ , la serie converge absolutamente.

Si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.

ii) Si  $L > 1$ , la serie diverge.

iii) Si  $L = 1$ , el criterio no es concluyente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n * n}$$

Centrada en  $a = 3$ ,  $C_n = \frac{1}{2^n * n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1} * (n+1)}}{\frac{(x-3)^n}{2^n * n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1} * 2^n n}{(x-3)^n * 2^{n+1} (n+1)} \right|$$

$$|x-3| * \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \frac{n}{2(n+1)} \right|}_{> 0} = |x-3| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2(n+1)} \right)$$

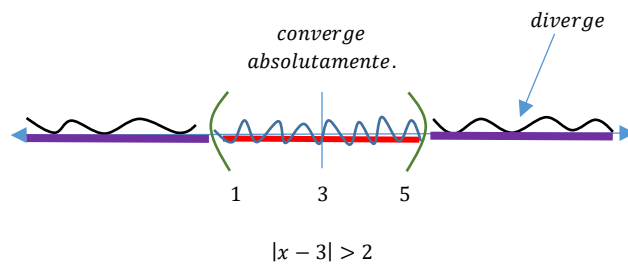
$$> 0 = |x-3| * \frac{1}{2} = L$$

i) La serie converge absolutamente.

$$\frac{|x-3|}{2} < 1 \text{ ssi } |x-3| < 2 = R$$

$$-2 < x-3 < 2$$

$$1 < x < 5$$



$R = 2$  es el radio de convergencia de la serie.

$I = (1, 5)$  es el intervalo de convergencia.

$x = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{2^n * n} \text{ es convergente}$$

$$x = 4 \quad , \quad x = \pi$$