

Apunte 30

Ecc. de Cauchy - Euler de orden 2.

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \quad (1)$$

Donde:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Ecc. Lineal con coeficientes constantes de orden 2.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

Donde:

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

Las soluciones:

$$(1) \quad y = x^m$$

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

Ecc. Característica:

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

$$(2) \quad y = e^{m_1x}$$

Ecc. Característica:

$$am^2 + bm + c = 0$$

En ambos casos las ecuaciones características pueden ser de 3 tipos:

- i. Reales y distintas.
- ii. Repetidas.
- iii. Complejo conjugadas.

Supongamos que son Reales y distintas:

Solución general:

En el caso (1):

$$y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} \quad x > 0$$

En el caso (2):

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} \quad x \in \mathbb{R}$$

El cambio de variable a utilizar:

Tomando a:

$$x = e^t \quad t = \ln(x)$$

Si tenemos una ecuación de Cauchy - Euler:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$$

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} * \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Resolver la ED mediante una reducción a coeficientes constantes.

$$x^2 y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$x = e^t, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right) - 3x \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + 13y = 4 + 3e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + 13y = 4 + 3e^t$$

Calcular y_c

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad m^2 - 4m + 13 = 0$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(13)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

$$m_1 = 2 + 3i, \quad m_2 = 2 - 3i \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3$$

$$y_c = C_1 e^{2t} \cos(3t) + C_2 e^{2t} \sin(3t)$$

Calcular y_p

$$y'' - 4y' + 13y = 4 + 3e^t$$

$$g(t) = 4 + 3e^t \quad y_p = A + Be^t$$

$$y'_p = Be^t, \quad y''_p = Be^t$$

$$Be^t - 4Be^t + 13A + 13Be^t = 4 + 3e^t$$

$$13A + 10Be^t = 4 + 3e^t$$

$$13A = 4, \quad 10Be^t = 3e^t, \quad A = \frac{4}{13}, \quad B = \frac{3}{10} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_p = A + Be^t \\ y_p = \frac{4}{13} + \frac{3}{10} e^t \end{array} \right.$$

Solución general de la ED con coeficientes constantes:

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{2t} \cos(3t) + C_2 e^{2t} \sin(3t) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10} e^t$$

Solución general de la ED de Cauchy - Euler:

$$\begin{cases} x = e^t \\ t = \ln x \end{cases}$$

$$\tilde{y} = C_1 e^{2\ln x} \cos(3 \ln x) + C_2 e^{2\ln x} \sin(3 \ln x) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10} e^{\ln x}$$

$$\tilde{y} = C_1 x^2 \cos(3 \ln x) + C_2 x^2 \sin(3 \ln x) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10} x$$

Sucesión: Una sucesión es una función ϕ que tiene como dominio al conjunto N y rango al conjunto R .

$$\rightarrow \begin{cases} \phi: N \rightarrow R \\ n \rightarrow \phi(n) = \underbrace{x_n} \end{cases}$$

Notación:

$$\{x_n\}_{n \in N} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

$$= \{\phi''_{(1)}, \phi''_{(2)}, \phi''_{(3)}, \phi''_{(4)}, \dots\}$$

$$\{x_{(n)}\}_{n \in N} = \{x(1), x(2), x(3), x(4), \dots\}$$

$$\{x_n\}_{n \in N} = \{1\}_{n \in N} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in N} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \dots \\ \phi''_{(1)}, & \phi''_{(2)}, & \phi''_{(3)}, & \phi''_{(4)}, & \dots & \dots \end{array} \right\}$$

$$\phi(n) = \frac{1}{n}$$

$$\{z^{n-1}\}_{n \in N} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$$

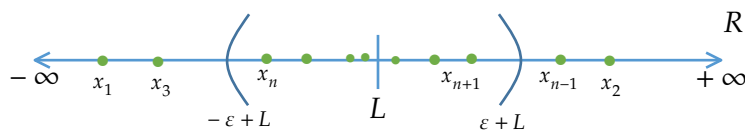
Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ de números reales, converge a $L \in R$ si $\forall \varepsilon > 0$ existe

$n \in N \exists |x_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, se denota,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \text{ssi} \quad -\varepsilon < x_n - L < \varepsilon, \quad -\varepsilon + L < x_n < \varepsilon + L$$

$$\forall n \geq N$$



$$\{x_n\}_{n \in N} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

$$\{1\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = L$$

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{200}, \dots\right\}$$

$$\{z^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n-1} = \infty$$

→ $ay'' + by' + cy = 0$ Con coeficientes constantes.

$$am^2 + bm + c = 0 \quad \text{Ecc. Característica.}$$

→ $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \dots (*)$

Una solución para (*) es una función $y(x)$ de la siguiente forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \quad C_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Una serie de potencias en $x - a$ es una serie infinita de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n = C_0 + C_1 (x - a) + C_2 (x - a)^2 + C_3 (x - a)^3 + \dots$$

Se dice que esta serie es una serie de potencias centrado en a.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n \quad \text{esta centrado en } a = -1$$

$$C_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= 1 + (x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n} (x-5)^n \quad \text{esta centrado en } a = 5$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{10^n}$$

$$= \frac{-1}{10} (x-5) + \frac{(-1)^2}{10^2} (x-5)^2 + \frac{(-1)^3}{10^3} (x-5)^3 + \frac{(-1)^4}{10^4} (x-5)^4 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-0)^n$$

¿Para que valores de x's la serie de potencias es convergente?

Si $x = x_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x_0 - a)^n = M \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n =$$

$$a = x = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

$$¿ \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x_0+1)^n = M \in \mathbb{R} \quad ?$$

Convergencia: Una serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

Es convergente en un valor específico de x si la sucesión de sumas parciales:

$$\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Converge, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

Existe.

Si el límite no existe en x , entonces se dice que la serie es divergente.

$$\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{S_1(x), S_2(x), S_3(x), \dots\}$$

$$S_n(x) = \sum_{n=0}^n C_n (x-a)^n$$

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^1 C_n (x-a)^n, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^2 C_n (x-a)^n$$