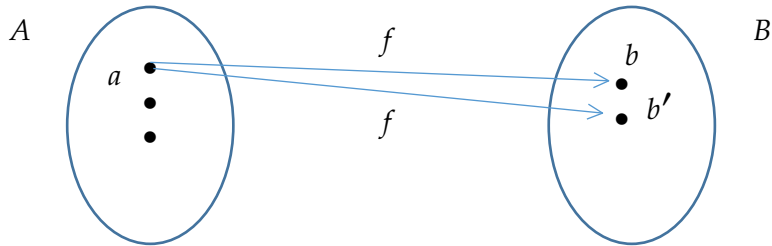


### Apunte 3

#### Función.

$$f: A \rightarrow B$$

$$a \rightarrow f(a) = b \quad \text{con } b \text{ único elemento de } B$$



Si  $f$  es una función entonces:

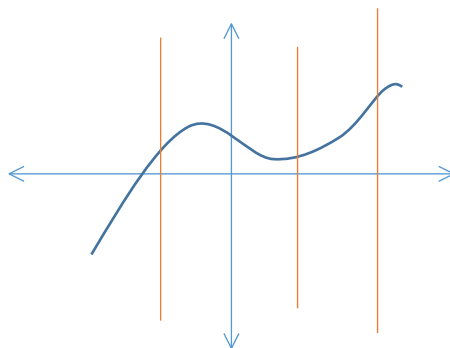
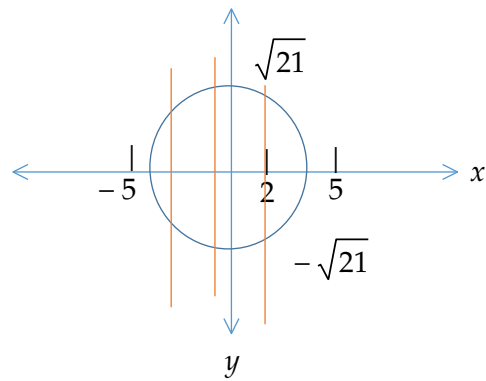
$$b = b'$$

Gráficas  $(f) \subseteq x \times y$

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

Si  $x = 2$

$$\begin{array}{l} \nearrow \sqrt{21} \\ \searrow -\sqrt{21} \end{array}$$



$$y' = -\frac{x}{y} \quad y^2 + x^2 = 25$$

Por lo tanto, las dos funciones que satisfacen la relación:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Y son soluciones de la EDO en el intervalo:

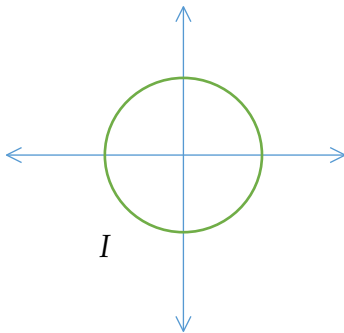
$$(-5, 5) = I$$

$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

$$y_1 = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad y \quad y_2 = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

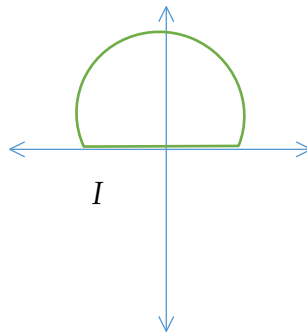
Solución implícita:

$$x^2 + y^2 = 25$$

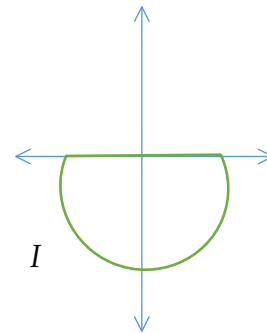


Soluciones explícitas:

$y_1$



$y_2$



## Familia de soluciones.

$$y' + 2xy = 0$$

El estudio de las ED's es similar al cálculo integral.

$\phi$  Es integral de la ecuación y su gráfica se llama CURVA INTEGRAL.

EDO de primer orden en Forma General:

$$F(x, y, y') = 0$$

Normalmente obtenemos una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro C, es decir, de la forma:

$$G(x, y, c) = 0$$

Es un conjunto de soluciones llamado:

Familia de soluciones uniparamétrica.

Una EDO de segundo orden en Forma normal:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

La familia de soluciones 2 - paramétrica es de la forma:

$$G(x, y, C_1, C_2) = 0$$

Una EDO de orden n

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Buscamos una familia de soluciones n-paramétricas:

$$G(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

$\therefore$  Una ED puede tener un número infinito de soluciones correspondiendo a un número ilimitado de elecciones de los parámetros.

Una solución de una ED que esté libre de la elección de parámetros se llama:

SOLUCIÓN PARTICULAR.

**Ejemplo:** EDO de primer orden:

$$xy' - y = x^2 \sin(x) \quad (\text{lineal})$$

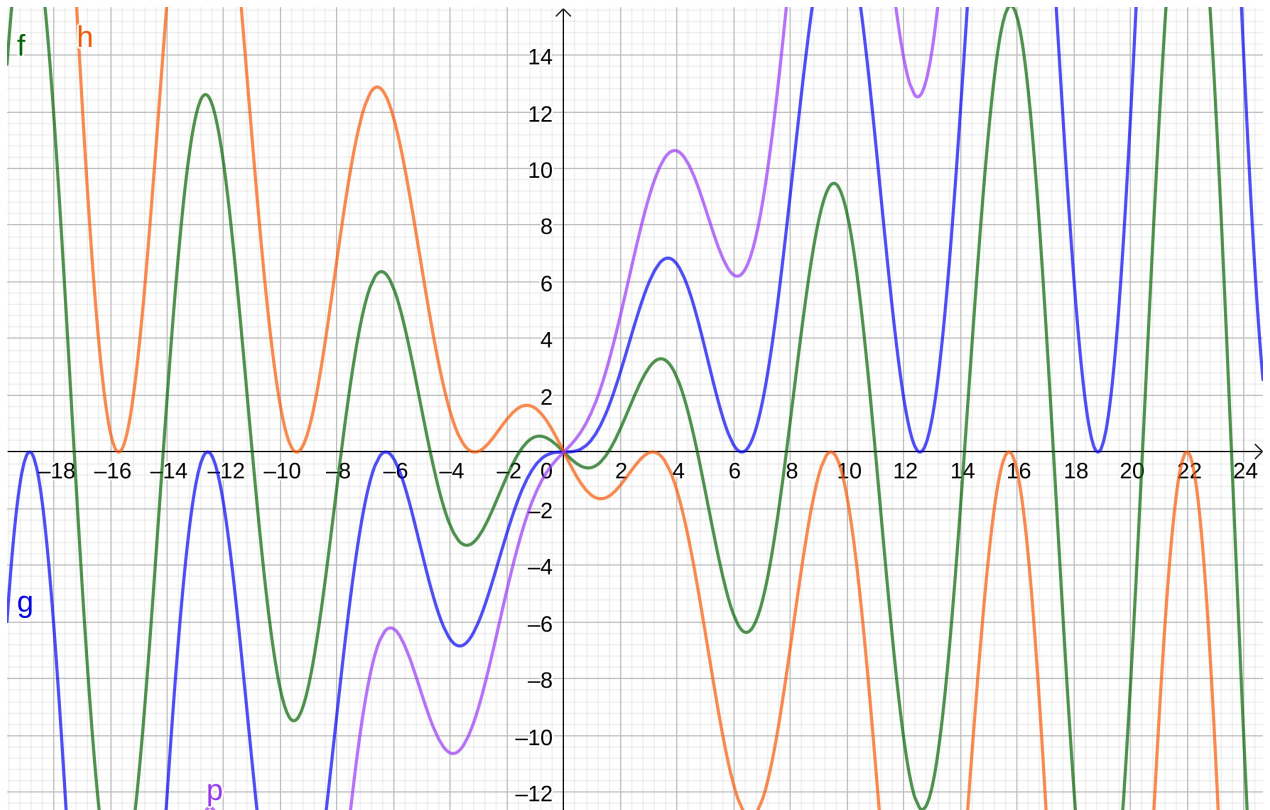
La familia uniparámica:

$$y = cx - x \cos x$$

Es una solución explícita de la EDO (ejercicio) en:

$$I = R = (-\infty, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} C = 0 \quad y = -x \cos x \\ C = 1 \quad y = x - x \cos x \\ C = 2 \quad y = 2x - x \cos x \\ C = -1 \quad y = -x - x \cos x \\ C = -2 \quad y = -2x - x \cos x \end{array} \right\} \text{Soluciones Particulares.}$$



**Ejemplo:** EDO de segundo orden:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (\text{lineal})$$

Una familia de soluciones de dos parámetros en el intervalo:

$$I = (-\infty, +\infty)$$

Es:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x \quad (\text{Comprobar})$$

Soluciones particulares:

$$C_1 = C_2 = 0, \quad y = 0$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad y = x e^x$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad y = e^x$$

$$C_1 = 2, \quad C_2 = -3, \quad y = 2e^x - 3x e^x$$

---

En algunas ocasiones una solución de la ED no será miembro de una Familia de soluciones, es decir, es una solución que no se puede obtener usando un parámetro específico de la Familia de soluciones, y se llama:

### SOLUCIÓN SINGULAR.

**Ejemplo:**

$$y' = x y^{\frac{1}{2}} \quad (\text{no lineal})$$

Dos soluciones de la ED son:

$$y = \frac{x^4}{16} \quad y \quad y = 0 \quad (\text{ejercicio})$$

En  $I = \mathbb{R}$

La ED tiene la Familia de soluciones uniparamétricas:

$$y = \left( \frac{x^2}{4} + C \right)^2$$

Si  $C = 0$  ,  $y = \frac{x^4}{16}$

$y = 0$  Es una solución SINGULAR ya que no es miembro de la Familia.

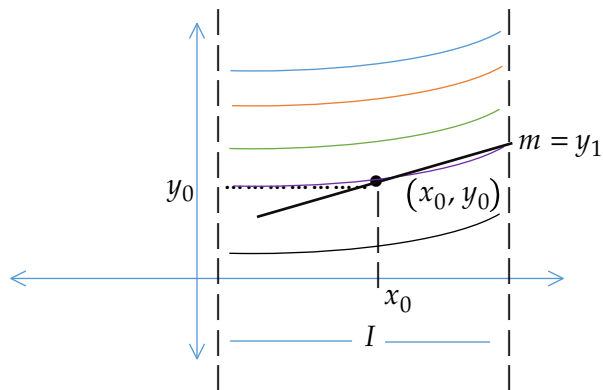
**Problemas con valores iniciales (PVI).**

$$\left. \begin{array}{l}
 y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\
 \text{Sea } I \text{ un intervalo y } x_0 \in I \\
 \text{Sujeto a: } \left. \begin{array}{l}
 y(x_0) = y_0 \\
 y'(x_0) = y_1 \\
 \vdots \\
 y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}
 \end{array} \right\} \text{ Condiciones Iniciales}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{PVI} \\
 \text{de } n - \text{ésimo orden}
 \end{array}$$

Donde  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  son constantes reales arbitrarias dadas.

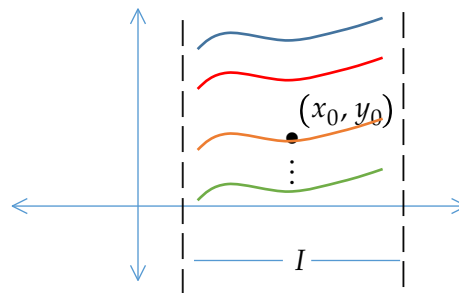
PVI de 2 orden:

$$\begin{array}{l}
 y'' = f(x, y, y') \\
 y(x_0) = y_0 \quad (x_0, y_0) \\
 y'(x_0) = y_1
 \end{array}$$



PVI de 1er orden:

$$\begin{array}{l}
 y' = f(x, y) \\
 y(x_0) = y_0
 \end{array}$$



PVI de 3er orden:

$$\begin{array}{l}
 y''' = f(x, y, y', y'') \\
 y(x_0) = y_0 \\
 y'(x_0) = y_1 \\
 y''(x_0) = y_2
 \end{array}$$

**Ejemplo:**

$$y' = y$$

$$y(0) = 3$$

Familia de soluciones es:

$$y = ce^x \text{ (ejercicio)}$$

Sustituir:

$$x_0 = 0$$

$$3 = y(0) = Ce^0 = C \quad \Rightarrow C = 3$$

La solución al PVI es:

$$y = 3e^x$$