Apunte 29

Resuelva:

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^2e^x$$

y_c

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$$

Ecc. Característica:

$$m(m-1) - 3m + 3 = 0$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$(m-1)(m-3) = 0$$

Raíces:

$$m_1 = 1 \quad y \quad m_2 = 3$$

Se tiene:

$$y_c = C_1x + C_2x^3 \qquad en \quad (0, +\infty)$$

$$\{y_1 = x \quad , \quad y_2 = x^3\} Forman\ un\ conjunto\ fundamental\ de\ soluciones.$$

Calcular una solución particular de la EDD no homogénea.

Utilizando el método de variación de parámetros.

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x \qquad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x$$

$$u_1 = \int -x^2e^x\,dx = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$$

$$u_2 = \int e^x\,dx = e^x$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y_p = \left(-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x\right)(x) + (e^x)\left(x^3\right)$$

$$= 2x^2e^x - 2xe^x$$

Solución general de la ED es:

$$y = y_c + y_p = C_1x + C_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x$$

Relación existente entre las ecuaciones con coeficientes constantes y las ecuaciones de Cauchy - Euler.

Reducción a Coeficientes constantes.

Suponer que tenemos una Ecc. De Cauchy - Euler homogénea de segundo orden:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

Considerar la ED lineal con coeficientes constantes de segundo orden:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Las respectivas soluciones generales son:

$$y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} \quad x > 0$$

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

Respectivamente, (suponiendo que las raíces de la ecc. Característica son reales y distintas).

Utilizando:

$$e^{\ln x} = x \quad x > 0$$

$$y = C_1 e^{m_1 \ln x} + C_2 e^{m_2 \ln x} = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

$$C_1 \left(e^{\ln x}\right)^{m_1} + C_2 \left(e^{\ln x}\right)^{m_2}$$

Donde:

$$t = \ln x$$

Por lo tanto, cualquier ED de Cauchy - Euler siempre se puede escribir como una ED lineal con coeficientes constantes sustituyendo:

$$x = e^t$$

Sustituimos:

$$t = \ln x$$

Resolver:

$$x^2 y'' - xy' + y = \ln x$$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

Sustituir:

$$x = e^t \quad o \quad t = \ln x$$

Utilizando a: t = ln x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dy} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

La ED:

$$x^2y'' - xy' + y = \ln x$$

$$x^2\left[\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]\right] - x\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dy}\right] + y = \ln\left(e^t\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} + y = t$$

y_c

Ecc. Característica:

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)\,(m-1) = 0$$

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$y_c = C_1e^t + C_2te^t$$

Utilizando método de coeficientes indeterminados.

Calcular y_p

$$y_p = A + Bt$$

$$y_p' = B \quad , \quad y_p'' = 0$$

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = t$$

$$0 - 2B + A + Bt = t$$

$$Bt + (-2B + A) = t$$

$$B = 1 \qquad -2B + A = 0 \implies A = 2$$

$$\therefore\ y_p = A + Bt = 2 + t$$

Solución general:

$$y = y_c + y_p$$

$$= C_1 e^t + C_2 t e^t + (2 + t)$$

$$x = e^t \qquad , \qquad t = \ln x$$

$$y = C_1 e^{\ln x} + C_2 \ln x\, e^{\ln x} + (2 + \ln x)$$

$$= C_1 x + C_2 x \ln x + (2 + \ln x)$$