Apunte 28

Una ecuación de la forma:

$$a_n x^n y^{(n)} + \ a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Donde $a_i \ i = 0, \ldots, n$ son constantes; se conoce como una ecc. De Cauchy - Euler.

$$a_n x^n = \frac{d^n y}{dx^n}$$

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Ecc. Homogénea de segundo orden: (Ecc. Cauchy - Euler)

$\rightarrow \ ax^2 y^{(2)} + bxy' + cy = 0$ (homogénea)
$\rightarrow \ ax^2 y^{(2)} + bxy' + cy = g(x)$ (no homogénea)

$$ax^2 = 0 \quad ssi \quad x = 0$$

i. Encontraremos soluciones generales definidas en $(0, \ +\infty)$

ii. Las soluciones en $(-\infty, 0)$ se obtienen sustituyendo $t = -x$ en la ED.

$$ax^2 y^{(2)} + bxy' + cy = 0$$

Proponemos una solución de la forma $y = x^m$ donde m es una valor por determinar.

$$y = x^m$$
$$y' = mx^{m-1}$$
$$y^{(2)} = m(m-1)x^{m-2}$$
$$\vdots$$
$$y^{(k)} = m(m-1)(m-2) \cdots (m-(k-1))x^{m-k}$$

$$ax^2y^{(2)} + bxy' + cy = ax^2m(m-1)x^{m-2} + bxmx^{m-1} + cx^m = 0$$

$$= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = 0$$

$$x^m(am(m-1) + bm + c) = 0$$

Como $x^m \neq 0$:

$$am(m-1) + bm + c = 0$$

Ecc. Característica:

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

Tres casos:

i. Raíces reales y distintas.

Sean m_1 , $m_2 \in R \ni m_1 \neq m_2$

Entonces:

$$\{y_1(x) = x^{m_1} \quad , \quad y_2(x) = x^{m_2}\}$$

Forman un conjunto fundamental de soluciones. (Ejercicio) en $(0, +\infty)$

Solución general:

$$y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} \ \ en \ \ (0, +\infty)$$

Ejemplo:

Resolver:

$$x^2y^{(2)} - 2xy' - 4y = 0$$

Proponemos la solución**:**

$$y = x^m$$

$$x^2m(m-1)y^{m-2} - 2xmy^{m-1} - 4x^m = 0$$

$$(m(m-1) - 2m - 4)x^m = 0$$

Ecc. Característica:

$$m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$m_1 = +4 \quad , \quad m_1 = -1$$

Solución general:

$$y = C_1 x^4 + C_2 x^{-1} \quad en \quad (0, \ +\infty)$$

---

ii. Raíces reales repetidas.

Sean $m_1 = m_2 \in R$, así solo tenemos una solución particular:

$$y_1 = x^{m_1}$$

La segunda solución es de la forma:

$$y_2 = x^{m_1} \ln(x)$$

$$\{y_1, y_2\} \ es\ un\ conjunto\ fundamental\ de\ soluciones\ (Ejercicio)$$

La solución general es:

$$y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_1} \ln(x) \quad en \quad (0, \ +\infty)$$

Ejemplo:

Resolver:

$$4x^2 y^{(2)} + 8xy' + y = 0$$

Ecc. Característica:

$$4m(m-1) + 8m + 1 = 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$$

Solución general:

$$y = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^{-\frac{1}{2}} \ln(x) \quad en \quad (0, \ +\infty)$$

Para una ED de Cauchy - Euler de orden superior, m_1 es una raíz de multiplicidad K>2 entonces:

$$x^{m_1} \quad , \quad x^{m_1}\ln(x) \quad , \quad x^{m_1}(\ln(x))^2 \quad , \quad x^{m_1}(\ln(x))^3 \quad , \dots , x^{m_1}(\ln(x))^{k-1}$$

Son K soluciones, son l.i.

Así la solución general debe contener una combinación lineal de estas K soluciones.

---

iii. Raíces complejas conjugadas.

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad , \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha, \beta > 0 \in R$$

Una solución general:

$$y = C_1 x^{\alpha+i\beta} + C_2 x^{\alpha-i\beta}$$

$x^{i\beta} = \left(e^{\ln x}\right)^{i\beta} = e^{i\beta \ln x}$

$$x^{i\beta} = e^{i\beta\ln(x)} = \cos\left(\beta\ln(x)\right) + i\sin\left(\beta\ln(x)\right)$$
$$x^{-i\beta} = e^{-i\beta\ln(x)} = \cos\left(\beta\ln(x)\right) - i\sin\left(\beta\ln(x)\right)$$

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos\left(\beta\ln(x)\right)$$
$$x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2i\sin\left(\beta\ln(x)\right)$$

Si $C_1 = C_2 = 1$

$$y_1 = x^{\alpha}\left(x^{i\beta} + x^{-i\beta}\right) = 2x^{\alpha}\cos\left(\beta\ln(x)\right)$$

Si $C_1 = 1 \quad y \quad C_2 = -1$

$$y_2 = x^{\alpha}\left(x^{i\beta} - x^{-i\beta}\right) = 2ix^{\alpha}\sin\left(\beta\ln(x)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore y_1 &= x^{\alpha}\cos\left(\beta\ln(x)\right) \\ y_2 &= x^{\alpha}\sin\left(\beta\ln(x)\right) \end{aligned}\right\} Forman\ un\ conjunto\ fundamental\ de\ soluciones.$$

$\therefore$ Solución general es:

$$y = \overline{C_1}x^{\alpha}\cos\left(\beta\ln(x)\right) + \overline{C_2}x^{\alpha}\sin\left(\beta\ln(x)\right)$$

Resolver el PVI:

$$4x^2y'' + 17y = 0 \qquad y(1) = -1 \qquad y'(1) = -\frac{1}{2}$$

Suponiendo que la solución es:

$$y = x^m$$

Entonces la Ecc. Característica es:

$$4m(m-1) + 17 = 0$$

$$4m^2 - 4m + 17 = 0$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(17)}}{2(4)} = \frac{4 \pm 16i}{8} = \frac{1}{2} \pm 2i$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta = 2$$

Solución general:

$$y = C_1 x^{\frac{1}{2}} \cos(2\ln(x)) + C_2 x^{\frac{1}{2}} \sin(2\ln(x))$$

$$m_1 = \frac{1}{2} + 2i \;\rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = 2$$

$$m_2 = \frac{1}{2} - 2i \;\rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = -2$$

$$\overline{C_2} = C_2$$

$$y = C_1 x^{\frac{1}{2}} \cos(-2\ln(x)) + C_2 x^{\frac{1}{2}} \sin(-2\ln(x))$$

$$= C_1 x^{\frac{1}{2}} \cos(2\ln(x)) - C_2 x^{\frac{1}{2}} \sin(2\ln(x))$$

$$= C_1 x^{\frac{1}{2}} \cos(2\ln(x)) + \overline{C_2} x^{\frac{1}{2}} \sin(2\ln(x))$$

Dadas las condiciones iniciales:

$$y(1) = -1 \quad , \quad y'(1) = -\frac{1}{2}$$

$$y = C_1 x^{\frac{1}{2}} \cos(2\ln(x)) + C_2 x^{\frac{1}{2}} \sin(2\ln(x))$$

$$x = 1 \quad , \quad -1 = y(1) = C_1 + C_2 * 1 * 0 \; => \; C_1 = -1$$

$$y' = C_1 \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} \cos(2\ln(x)) + x^{\frac{1}{2}}(-\sin(2\ln(x))) * \frac{2}{x} \right) + C_2 \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} \sin(2\ln(x)) + x^{\frac{1}{2}}(\cos(2\ln(x))) * \frac{2}{x} \right)$$

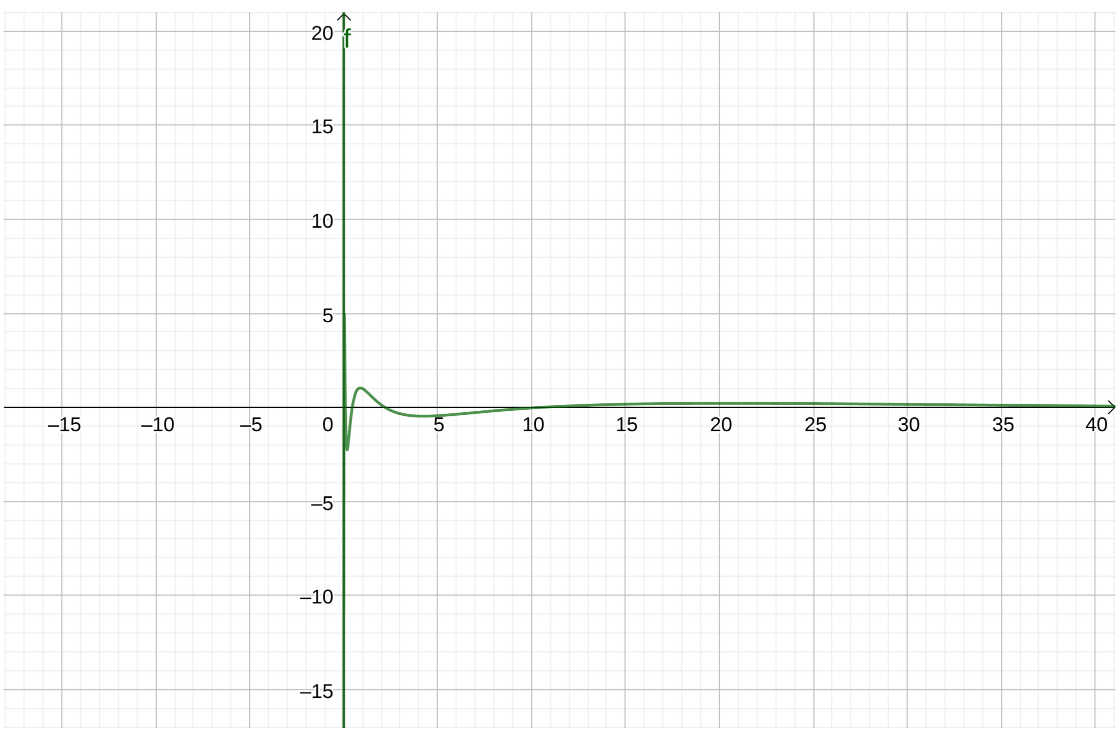
$$-\frac{1}{2} = y'(1) = C_1\left(\frac{1}{2} + 0\right) + C_2 * 2 \quad => \quad C_2 = 0$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C_2 * 2$$

La solución al PVI es:

$$y = -x^{\frac{1}{2}} \cos(2\ln(x)) \quad en \quad (0, +\infty)$$

Gráfica:



Resolver:

$$x^3y^{(3)} + 5x^2y^{(2)} + 7xy' + 8y = 0$$

Ecc. Característica: Suponer que la solución es de la forma:

$$y = x^m$$

$$1m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8 = 0$$

$$m^3 + 2m^2 + 4m + 8 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ & -2 & 0 & -8 & \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$m^2 + 4 = 0 \qquad m = \pm 2i$$

$$m_1 = -2 \quad , \quad m_2 = 2i \quad , \quad m_3 = -2i$$

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 2$$

Solución general:

$$y(x) = C_1x^{-2} + C_2\cancel{x^0}\cos(2\ln(x)) + C_3\cancel{x^0}\sin(2\ln(x))$$

Ejercicio:

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$$