

Apunte 24

Ejemplo 1.

$$y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} + 7e^{-x}$$

y_c

$$y'' - 8y' + 25y = 0 \quad , \quad m^2 - 8m + 25 = 0$$

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(25)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2}$$

$$m_1 = 4 + 3i \quad , \quad m_2 = 4 - 3i$$

$$y_c = C_1 e^{4x} \cos(3x) + C_2 e^{4x} \sin(3x)$$

y_p

$$g(x) = 5x^3e^{-x} + 7e^{-x} = \underbrace{(5x^3 + 7)}_{\text{polynomial}} \underbrace{e^{-x}}_{\text{exponential}}$$

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}$$

Ejemplo 2:

$$y'' + 4y = x \cos x$$

y_c

$$y'' + 4y = 0 \quad , \quad m^2 + 4 = 0$$

$$m = \pm 2i$$

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 2$$

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

y_p

$$g(x) = \underbrace{x}_{\text{polynomial}} \underbrace{\cos x}_{\text{trig}} \quad y_p = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$$

Ejemplo 3.

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5 \sin 2x + 7xe^{6x}$$

y_c

$$y'' - 9y' + 14y = 0$$

$$m^2 - 9m + 14 = 0$$

$$(m - 7)(m - 2) = 0$$

$$m_1 = 7, \quad m_2 = 2$$

$$y_c = C_1 e^{7x} + C_2 e^{2x}$$

y_p

$$g(x) = \underbrace{3x^2}_{g_1} - \underbrace{5 \sin 2x}_{g_2} + \underbrace{7xe^{6x}}_{g_3}$$

A $g_1(x) = 3x^2$ le corresponde $\rightarrow y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$

A $g_2(x) = -5 \sin 2x$ le corresponde $\rightarrow y_{p2} = E \cos 2x + F \sin 2x$

A $g_3(x) = 7xe^{6x}$ le corresponde $\rightarrow y_{p3} = (Gx + H)e^{6x}$

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} \\ &= Ax^2 + Bx + C + E \cos 2x + F \sin 2x + (Gx + H)e^{6x} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

y_c

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m_{1,2} = 1$$

$$y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

y_p

$$g(x) = e^x \quad , \quad \begin{array}{l} y_p = Ae^x \quad \times \\ y_p = Axe^x \quad \times \\ y_p = Ax^2 e^x \end{array}$$

Sustituyendo en la EDO obtenemos:

$$A = \frac{1}{2} \quad (\text{Ejercicio})$$

$$y_p = \frac{x^2 e^x}{2} \quad n = 2$$

Para casos como el ejemplo anterior. Si algún término de y_p contiene términos que dupliquen los términos de y_c , entonces ese término que duplican los términos de y_c , entonces ese término se debe multiplicar por x^n , onde n es el entero positivo más pequeño que elimina esa duplicación.

Ejemplo 5.

$$y'' + y = 4x + 10 \sin x$$

 y_c

$$y'' + y = 0$$

$$m^2 + 1 = 0$$

$$m_{1,2} = \pm i$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1$$

$$y_c = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

 y_p

$$y_p = Ax + B + C \cos x + E \sin x \quad \times$$

$$\rightarrow y_p = Ax + B + Cx \cos x + Ex \sin x$$

Ejemplo 6.

$$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$$

 y_c

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 3$$

$$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

 y_p

$$g(x) = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ee^{3x} \quad \times$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ex^2 e^{3x}$$

Ejemplo 7.

$$y''' + y'' = e^x \cos x$$

 y_c

$$y''' + y'' = 0$$

$$m^3 + m^2 = 0 \quad , \quad m_1 = m_2 = 0 \quad m_3 = -1$$

 y_p

$$y_c = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}$$

$$g(x) = e^x \cos x$$

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$$

Ejemplo 8.

$$y^{(4)} + y''' = 1 - x^2e^{-x}$$

 y_c

$$y^{(4)} + y''' = 0 \quad , \quad m^4 + m^3 = 0 \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0 \quad , \quad m_4 = -1$$

 y_p

$$y_c = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x}$$

$$g(x) = 1 - x^2e^{-x}$$

$$y_p = A + Bx^2e^{-x} + Cxe^{-x} + Ee^{-x} \times$$

$$(Bx^2 + Cx + E)e^{-x}$$

$$y_p = Ax^3 + Bx^3e^{-x} + Cx^2e^{-x} + Exe^{-x}$$

Variación de Parámetros.

El método se utiliza para encontrar una solución particular y_p de una ED lineal de orden n.

ED de segundo grado:

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

Escribir a la ED en forma estándar:

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = f(x) \quad \dots (*) \quad a_2(x) \neq 0$$

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \quad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \quad f(x) = \frac{g(x)}{a_2(x)}$$

Donde se supone $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ son continuas en I.

Para la ED (*) se busca una solución de la forma:

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

Donde y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la ED homogénea asociada (*)

$$y_p' = u_1 y_1' + y_1 u_1' + u_2 y_2' + y_2 u_2'$$

$$y_p'' = u_1 y_1'' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' + y_1' u_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2' + y_2 u_2'' + y_2' u_2'$$

Sustituyendo en (*)

$$y'' + P(x) y_p' + Q(x) y_p = u_1 [y_1'' + P y_1' + Q y_1] + u_2 [y_2'' + P y_2' + Q y_2] + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + y_2 u_2''$$

$$+ u_2' y_2' + P [y_1 u_1' + y_2 u_2'] + y_1' u_1' + y_2' u_2'$$

$$= \frac{d}{dx} (y_1 u_1') + \frac{d}{dx} (y_2 u_2') + P (y_1 u_1' + y_2 u_2') + (y_1' u_1' + y_2' u_2') = f(x)$$

$$= \frac{d}{dx} (y_1 u_1' + y_2 u_2') + P (y_1 u_1' + y_2 u_2') +$$

Funciones desconocidas u_1 y u_2 , por la cual es necesario dos ecc's. Suponiendo que las funciones u_1 y u_2 satisfacen:

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' &= 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' &= f(x) \end{aligned}$$

Regla de Cramer:

$$0 \neq W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-f(x)y_2}{W} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W} \quad \dots(**)$$

Las funciones u_1 y u_2 se encuentra integrando (**)

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$