

Apunte 22

Solución general; ecuaciones no homogéneas.

ED lineal no homogénea de grado n:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \dots (*)$$

Sea y_p cualquier solución particular de la ED lineal no homogénea de n-ésimo orden (*) en un intervalo I.

Ejemplo: Sea la ED lineal de 3er orden con coeficientes constantes no homogénea:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$$

Donde la función $y_p(x) = -\frac{11}{12} - \frac{x}{2}$ es una solución particular de la ED no homogénea.

$$y_p' = -\frac{1}{2}, \quad y_p'' = y_p''' = 0$$

$$y_p''' - 6y_p'' + 11y_p' - 6y_p = 0 - 6 \cdot 0 + 11\left(-\frac{1}{2}\right) - 6\left(-\frac{11}{12} - \frac{x}{2}\right) = 3x$$

Y sean y_1, y_2, \dots, y_n un conjunto fundamental de soluciones de la ED homogénea asociada a (*) en I.

Entonces la solución general de la ED (*) en el intervalo I es:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) + y_p$$

Donde C_i $i = 1, \dots, n$ son constantes arbitrarias.

La solución general está compuesta por la suma de 2 funciones.

$$y = y_c(x) + y_p(x)$$

La combinación lineal:

$$y_c(x) = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x)$$

→ Se llama función complementaria.

Resolver:

$$y'''' - 6y''' + 11y'' - 6y' = 3x \quad y_p(x) = -\frac{11}{12} - \frac{x}{2}$$

Resolver la ED homogénea asociada:

$$y'''' - 6y''' + 11y'' - 6y' = 0$$

Ecc. Característica:

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$

Raíces:

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 3$$

$$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

Entonces la solución de la ED no homogénea:

$$y = y_c(x) + y_p(x)$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + \left(-\frac{11}{12} - \frac{x}{2}\right) \quad \text{en } I = \mathbb{R}$$

Principio de superposición, ecuaciones no homogéneas.

Sean:

$$y_{p_1}, \dots, y_{p_k}$$

K soluciones particulares de la ED a K funciones diferentes:

$$g_1, g_2, \dots, g_k$$

Es decir, y_{p_i} es una solución particular de la ED lineal no homogénea.

$$a_n(t) y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) y' + a_0(t) y = g_i(t)$$

$$\forall i = 1, \dots, K$$

Entonces:

$$y_p = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) + \dots + y_{p_k}(t)$$

Es solución particular de:

$$\begin{aligned} a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y \\ = g_1(t) + g_2(t) + \dots + g_k(t) \end{aligned}$$

Resolver:

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x$$

$$g(x) = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x \quad \dots(**)$$

$$g_1(x) = -16x^2 + 24x - 8$$

$$g_2(x) = 2e^{2x}$$

$$g_3(x) = 2xe^x - e^x$$

Soluciones particulares de las ED'S

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 \quad \rightarrow \quad y_{p_1} = -4x^2$$

$$y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x} \quad \rightarrow \quad y_{p_2} = e^{2x}$$

$$y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x \quad \rightarrow \quad y_{p_3} = xe^x$$

=> La solución particular de la ED (**) es:

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x) = -4x^2 + e^{2x} + xe^x$$

Coefficientes indeterminados

Objetivo: Resolver una ED lineal no homogénea.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad \dots(1)$$

Realizar 2 pasos:

1. Encontrar la función complementaria.
2. Encontrar alguna solución y_p de la ED no homogénea.

La solución general:

$$y = y_c + y_p$$

El método de coeficientes indeterminados se limita a ED lineales como (1) donde:

- i. Los coeficientes: $a_i \quad i = 0, 1, \dots, n$ son constantes.
- ii. $g(x)$ es Una constante K ,
Una función polinomial
Una función exponencial e^{ax}

Una función seno o coseno $\sin \beta x$, $\cos \beta x$

O sumas finitas y productos de estas funciones.

$$g(x) = 10, \pi, e$$

$$g(x) = e^{5x}$$

$$g(x) = x^2 + 10x + 2$$

$$g(x) = \cos 3x, \sin 4x$$

$$g(x) = 15x - 6 + 8e^{-x}$$

$$g(x) = xe^x \sin x + (3x^2 - 1)e^{-4x}$$

Es decir, $g(x)$ es una combinación lineal de funciones de la clase:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$p(x) e^{ax}, p(x) e^{ax} \sin \beta x \quad y \quad p(x) e^{ax} \cos \beta x$$

Donde n es un entero y $a, \beta \in \mathbb{R}$

El método de coeficientes indeterminados no es compatible a ecuaciones donde $g(x)$ es de la forma:

$$g(x) = \ln x \quad , \quad g(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$g(x) = \sin^{-1}(x) \quad , \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Resolver:

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$$

PASO 1:

y_c Resolver la ED:

$$y'' + 4y' - 2y = 0$$

Ecc. Característica:

$$m^2 + 4m - 2 = 0$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

$$m_1 = -2 + \sqrt{6} \quad , \quad m_2 = -2 - \sqrt{6}$$

$$y_c = C_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{6})x}$$

PASO 2: Encontrar y_p

$g(x)$ es un polinomio de grado 2.

Supongamos que y_p también es de la forma de un polinomio de grado 2, es decir:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Se busca determinar coeficientes específicos A, B y C, para los cuales y_p sea solución:

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A, \text{ sust. en la ED.}$$

$$\begin{aligned}y_p'' + 4y_p' - 2y_p &= 2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 2x^2 - 3x + 6\end{aligned}$$

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6$$

$$-2A = 2$$

$$8A - 2B = -3$$

$$2A + 4B - 2C = 6$$



$$A = -1$$

$$B = -\frac{5}{2}$$

$$C = -9$$

Entonces la solución particular es:

$$\begin{aligned}y_p &= Ax^2 + Bx + C \\ &= -x^2 - \frac{5}{2}x - 9\end{aligned}$$

La solución general de la EDO es:

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

En $I = \mathbb{R}$