Apunte 21

Ecuaciones diferenciales lineal de orden n con coeficientes constantes.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Ecc. Característica

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0$$

Polinomio de grado n.

Supongamos que las raíces del polinomio son reales y distintas: $m_1, m_2, \ldots, m_n$, entonces la solución general de la ED es:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

Resolver la ED:

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

Ecc. Característica:

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0$$

Las raíces del polinomio son:

$$m_1 = 1 \ , \ m_2 = -2$$

$$\begin{array}{l} m - (-2) = m + 2 \ \mid \ \ m^3 + 3m^2 - 4 \\ \qquad\qquad\quad m - 1 \end{array}$$

El polinomio: $m^3 + 3m^2 - 4$

Usando división sintética:

$m_1 = -2 \quad , \quad m_2 = 1$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 3 & 0 & -4 & \lfloor -2 \\ & -2 & -2 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$m^2 + m - 2 = 0$$

$$\begin{array}{cccl} 1 & 1 & -2 & \lfloor 1 \\ & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$m + 2 = 0 \quad , \quad m = -2$$

$m_1 = -2 \quad , \quad m_2 = 1 \quad , \quad m_3 = -2$

Las raíces del polinomio característico son <u>reales y distintas</u>. Por lo tanto la solución general de la ED es:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-2x}$$

<u>En este caso la solución no seria de esa forma porque hay 2 raíces iguales.</u>

Un polinomio de grado n, tiene n raíces:

$$m_1, m_2, m_3, \dots , m_n$$

Suponer que m_1 es una raíz de multiplicidad K, es decir K raíces son iguales a m_1.

$$m_1, m_2, m_3, \dots , m_n$$
$$\underbrace{\widehat{m_1}\ \ \widehat{m_1}\ \ \widehat{m_1}\ , \dots , m_1}_{\text{K raíces}}, \underbrace{m_{k+1}, \dots , m_n}$$

Las raíces l.i. son:

$$e^{m_1 x}, xe^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, \dots , x^{k-1} e^{m_1 x}$$

Es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto la solución general debe contener la siguiente combinación lineal:

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{m_1 x}$$

Del ejemplo anterior teníamos que:

-2 es una raíz de multiplicidad 2.

Tenemos que la solución general de la ED es:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + C_3 e^{x}$$

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

Si $m_1 = \alpha + i\beta \quad \beta > 0$ es una raíz compleja de multiplicidad k de la ecc. característica. Entonces, $m_2 = \alpha - i\beta$ es también una raíz de multiplicidad k.

$2k$ soluciones complejas:

$$e^{(\alpha+i\beta)x}\ ,\ xe^{(\alpha+i\beta)x}\ ,\ x^2 e^{(\alpha+i\beta)x}\ ,\dots,\ x^{k-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x}\ ,\ xe^{(\alpha-i\beta)x}\ ,\ x^2 e^{(\alpha-i\beta)x}\ ,\dots,\ x^{k-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$\therefore$ las 2k soluciones reales l.i. son:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\ ,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x\ ,\ x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x\ ,\dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x\ ,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x\ ,\ x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x\ ,\dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Resolver:

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$

Ecc. Característica:

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0$$

$$(m^2+1)^2 = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \quad ssi \quad m = \pm\, i$$

Las raíces son:

$$m_1 = i \ , \ m_2 = -i \ , m_3 = i \ , \ m_4 = -i$$

Las soluciones de la ED son:

$$y_1 = \cos x \ , \ y_2 = x\cos x \ , \ y_3 = \sin x \ , \ y_4 = x\sin x$$

Solución general:

$$m_1 = i \ , \ \alpha = 0 \ , \ \beta = 1$$
$$y = C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3\sin x + C_4 x\sin x$$

Resolver:

$$3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$$

Ecc. Característica:

$$3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = 0$$

Raíces:

$m = \frac{1}{3} \ , \ -1 \pm \sqrt{3}i$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & 5 & 10 & -4 & \frac{1}{3} \\ & 1 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & 6 & 12 & 0 & \end{array}$$

$$3m^2 + 6m + 12 = 0$$
$$m^2 + 2m + 4 = 0$$

Formula general:

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

$$m = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

Las raíces son:

$$m_1 = \frac{1}{3} \ , m_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

Las soluciones son:

$$y_1 = e^{\frac{x}{3}}$$

$$\alpha = -1 \ , \ \beta = \sqrt{3}$$

$$y_2 = e^{-x} \cos\sqrt{3}x \ , \ y_3 = e^{-x} \sin\sqrt{3}x$$

La solución general:

$$y = C_1 e^{\frac{x}{3}} + C_2 e^{-x} \cos\sqrt{3}x + C_3 e^{-x} \sin\sqrt{3}x$$

Resolver una ED lineal no homogénea.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad \ldots (*)$$

Debemos realizar dos cosas:

i. Encontrar una solución de la ED homogénea asociada, llamada la función complementaria: y_c
ii. Encontrar alguna solución <u>particular</u> y_p de la ED no homogénea.

∴ La solución de (*) es:

$$y = y_c + y_p$$

Cualquier función y_p libre de parámetros arbitrarios, que satisface (*) es una <u>solución particular</u> de la ED.

Ejemplo: Sea la ED lineal de segundo orden no homogénea:

$$y'' + 9y = 27$$

La función $y_p = 3$ es una solución particular

$$y_p'' = 0 \qquad y_p'' + 9y_p = 0 + 9 * 3 = 27$$

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ED homogénea:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

En I y $\rightarrow y_p$ es una solución particular de (*) entonces:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_p$$

Es también una solución de la ED (*)

Por ejemplo:

$$y'' + 9y = 27 \qquad y_p = 3$$

La ED homogénea es:

$$y'' + 9y = 0$$

Ecc. Característica:

$$m^2 + 9 = 0$$

Raíces:

$$m = \pm 3i$$

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 3$$

Las soluciones de la ED homogénea:

$$y_1 = \cos(3x) \quad , \quad y_2 = \sin(3x)$$

$$\therefore \; y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + 3$$

Es solución de la ED no homogénea.