**Apunte 20**

**Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de grado 2 con coeficientes constantes.**

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Con soluciones de tipo:

$y = e^{mx}$

Significa que al sustituir en la EDO:

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

Debe ser solución, la cual debe satisfacer la igualdad. Lo cual ayuda mucho a resolver las EDO, lo cual el problema se reduce a resolver la ecc. característica:

$$am^2 + bm + c = 0$$

En otras palabras seria encontrar las raíces de este polinomio de grado 2. A partir de la formula general, las soluciones son de esta forma:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por otro lado, todo polinomio de grado 2, tiene siempre 2 soluciones, el tipo de las soluciones depende del discriminante de nuestra ecuación, la cual es la expresión que se obtiene de la raíz cuadrada. Dado que el discriminarte es un numero real, obtenemos 3 posibilidades:

i. $\Delta > 0$ Raíces reales y distintas. $m_1 \neq m_2$

$$\left\{y_1 = e^{m_1x} \quad , \quad y_2 = e^{m_2x}\right\} \; conjunto\ fundamental$$

Solución general de la ED: $\rightarrow$ $y = C_1y_1 + C_2y_2 \quad C_1 , C_2 \in R$

**Resolver:** $2y'' - 5y' - 3y = 0$

Cumple con las condiciones, es lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes.

La ecc. característica de la ED es:

$$2m^2 - 5m - 3 = 0$$

Formula general:

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$\Delta > 0 \ \rightarrow \ \Delta = 49 > 0$

Las raíces son reales y distintas:

$$m_1 = 3$$
$$m_1 = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto las 2 soluciones son de la forma:

$$\left\{ y_1 = e^{3x} \ , \ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \right\}$$

Podríamos calcular el Wronskiano para verificar o demostrar que:

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \quad \forall x I = R$$

Solución general de la ED:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$$

ii. $\Delta = 0$ Raíces reales e iguales. $m_1 = m_2$

$$\left\{ y_1 = e^{m_1 x} \;\; , \;\; y_2 = x e^{m_1 x} \right\} \; son\ un\ conjunto\ fundamental$$

Solución general de la ED: $\rightarrow \; y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad C_1 \, , C_2 \in I = R$

**Resolver:** $y'' - 10y' + 25y = 0$

Cumple con las condiciones, por lo tanto la ecc. característica es:

$$m^2 - 10m + 25 = 0$$

Factorización:

$$(m-5)^2 = 0$$

Las raíces son:

$$m_1 = m_2 = 5$$

Obtenemos que las 2 soluciones son:

$$\left\{ y_1 = e^{5x} \;\; , \;\; y_2 = x e^{5x} \right\} \; conjunto\ fundamental$$

Solución general:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} \quad en \;\; I = R$$

iii. $\Delta < 0$ , $m_1$ y $m_2$ son raíces complejas y conjugadas.

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \alpha, \beta \in R \quad \beta > 0$$

$$m_2 = \alpha - i\beta$$

Soluciones l.i. , Wronskiano diferente de cero:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \;\; , \;\; y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

Fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$
$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x$$
$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\sin\beta x$$

Solución de la ED:

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Si $C_1 = C_2$

$$\rightarrow\ y_3 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(e^{+i\beta x} + e^{-i\beta x}\right)$$
$$= e^{\alpha x} 2\cos\beta x$$

Es un nueva solución de la ED.

Si $C_1 = 1$ , $C_2 = -1$

$$y_4 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(e^{+i\beta x} - e^{-i\beta x}\right)$$
$$= e^{\alpha x} 2i\sin\beta x$$

La cual también es solución de la ED.

$$\therefore\ e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Son soluciones de la ED y forman un conjunto fundamental en $I = R$

Solución general:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \quad en\ I = R$$

**Resolver:** $y'' + 4y' + 7y = 0$

Ecc. Característica:

$$m^2 + 4m + 7 = 0$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$m_1 = -2 + \sqrt{3}i \quad , \quad m_2 = -2 - \sqrt{3}i \quad \textit{son complejas}$$

$$\alpha = -2$$

$$\beta = \sqrt{3}$$

Por lo tanto una solución real de nuestra ED es igual a:

$$\left\{ y_1 = e^{-2x} \cos\left(\sqrt{3}x\right) \quad , \quad y_2 = e^{-2x} \sin\left(\sqrt{3}x\right) \right\} \textit{ conjunto fundamental}$$

Solución general:

$$y = C_1 e^{-2x} \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 e^{-2x} \sin\left(\sqrt{3}x\right) \quad en\ I = R$$

**Ecuaciones Diferenciales Exactas:**

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

La ED es exacta cuando $M_y = N_x$

Si la ED no es exacta entonces procedemos a encontrar un Factor Integrante:

i. $\frac{M_y - N_x}{N}$ Si este cociente es una función que solo depende x.

Entonces nuestro factor integrante es igual a:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

ii. $\frac{N_x - M_y}{M}$ Si este cociente es una función solo de y.

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dx}$$

**Resolver:** $4y'' + 4y' + 17y = 0 \qquad y(0) = -1 \;\; , \;\; y'(0) = 2$

Ecc. Característica:

$$4m^2 + 4m + 17 = 0$$

Las raíces son:

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16(17)}}{8} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{-16}}{8} = \frac{-4 \pm 4 * 4i}{8}$$

$$m_1 = -\frac{1}{2} + 2i \quad , \quad m_2 = -\frac{1}{2} - 2i$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \beta = 2i$$

Las soluciones:

$$\left\{ y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x) \qquad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x) \right\} \textit{conjunto fundamental}$$

Solución general:

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x) \quad en\ I = R$$

Evaluando con las condiciones iniciales:

$$-1 = y(0) = C_1 * 1 \cos(0) + C_2 * 1 \sin(0) = C_1 * 1 * 1 \Rightarrow \mathbf{-1 = C_1}$$

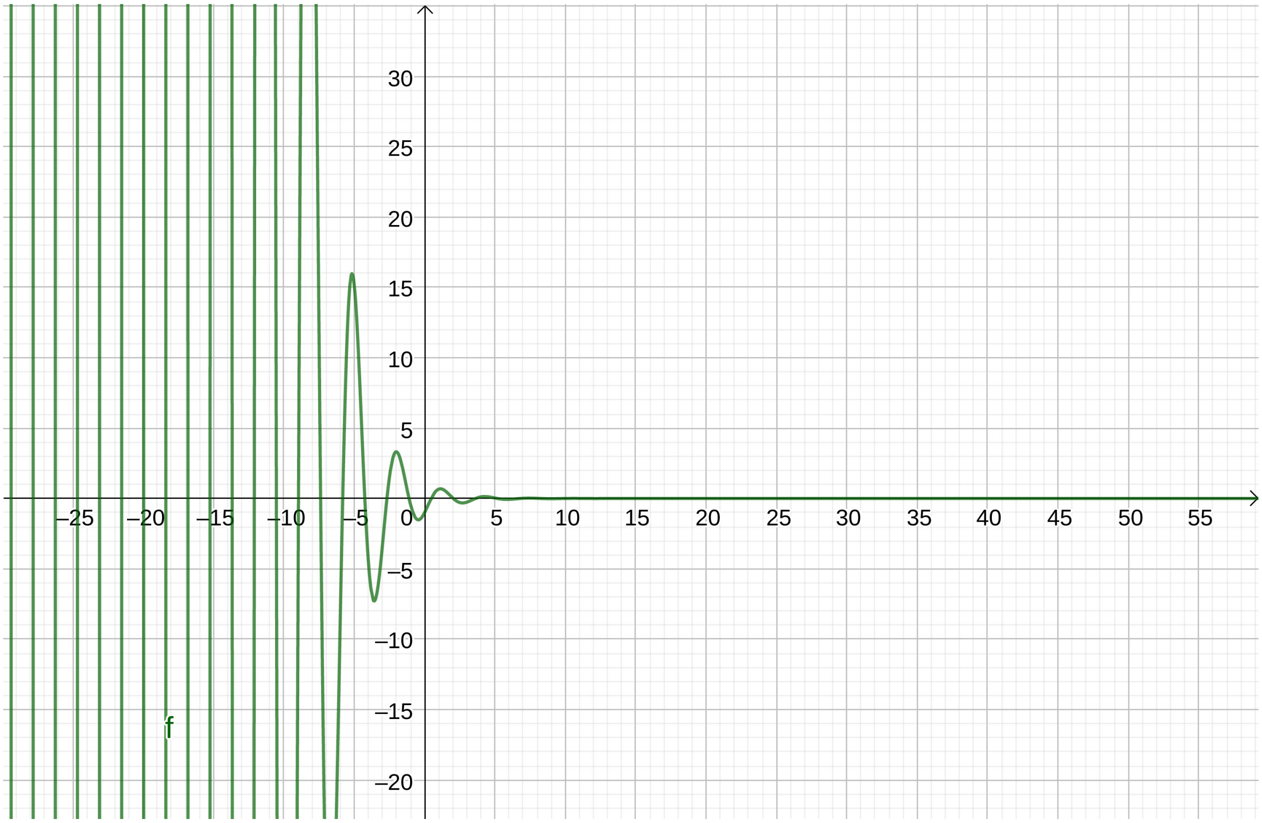
$$y'(x) = -\frac{C_1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x) - 2C_1 e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x) - \frac{C_2}{2} e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x) + 2C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x)$$

$$2 = y'(0) = -\frac{C_1}{2} * 1 * \cos(0) - 2C_1 * 1 * \sin(0) - \frac{C_2}{2} * 1 * \sin(0) + 2C_2 * 1 * \cos(0)$$

$$2 = \frac{1}{2} + 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\left(2 - \frac{1}{2}\right)}{2} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Solución al PVI $\rightarrow\ y = e^{-\frac{x}{2}} \left( -\cos 2x + \frac{3}{4} \sin 2x \right) \quad I = R$

$x \rightarrow \infty$
$x \rightarrow -\infty$




Gráfica de la función

---

**Ecuaciones de orden Superior**

ED lineal homogénea con coeficientes constantes:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad ai \in R \quad \forall i = 0, \dots, n$$

La solución de tipo:

$$y = e^{mx}$$

Ecc. Característica de la ED:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0 \quad \dots.(*)$$

Es una ecc. Polinomial (algebraica) de grado n.

Supongamos que$m_1, m_2, \dots, m_n$ son raíces reales y distintas, entre ellos, de (*)

Las soluciones de la ED: (*)

$$\left\{y_1 = e^{m_1 x}\ , y_2 = e^{m_2 x}\ , \dots , y_n = e^{m_n x}\right\}\ \ Forman\ un\ conjunto\ fundamental\ en\ I = R$$

Solución general:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots + C_n e^{m_n x} \qquad en\ I = R$$