Apunte 2

Definición: Solución de una EDO

Cualquier función ϕ, definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo.

$$\rightarrow \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x) \;\rightarrow\; \text{En } I$$

EDO de orden n $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$

$$\rightarrow F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0 \quad \forall\, x \in I$$

Ejemplo: Comprobar que la función es solución de la EDO.

Sea F: $y(x) = e^{2x^2}$

Sea la ED: $\rightarrow y' = 4xy \quad y' - 4xy = 0$

Solución:

1. Calculando la 1er derivada de la función: $y(x) = e^{2x^2}$

$$y'(x) = 4xe^{2x^2} \qquad I = R$$

2. Sustituyendo la función y su derivada en la EDO: $y' - 4xy = 0$

$$4xe^{2x^2} - 4xe^{2x^2} = 0$$

Intervalo de definición:

El intervalo I en la definición anterior se conoce como “intervalo de definición o dominio de la solución”, el cual puede ser un intervalo abierto (a,b), un intervalo cerrado [a,b], un intervalo infinito $(-\infty, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, a)$.

Ejemplo:

Sea la EDO no lineal de 1er orden:

$$y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0$$

Sea la función solución:

$$y = \frac{x^4}{16} \qquad I = (-\infty, +\infty)$$

Calculamos su 1er derivada de la función:

$$y' = \frac{x^3}{4}$$

Sustituyendo en la EDO original quedaría:

$$\frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - x\frac{x^2}{4} = 0$$

$\therefore y = \frac{x^4}{16}$ Es solución de la EDO con $I = R$

Ejemplo:

Sea la EDO lineal de segundo orden.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Sea la función solución:

$$y = xe^x$$

Calculando las 2 derivas:

$y' = xe^x + e^x$

$y'' = xe^x + 2e^x$

$\therefore y' \ \& \ y'' \quad \forall I = R$

Sustituyendo las derivadas calculadas en la EDO original:

$$xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x = 0$$

Ordenando y resolviendo los valores:

$$2e^x - 2e^x + 2xe^x - 2xe^x = 0$$

$\therefore y = xe^x$ Es solución de la EDO en $I = R$

Por lo tanto podemos afirmar que las EDO:

$$y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0 \quad ; \quad y'' - 2y' + y = 0$$

Las cuales tienen solución con las funciones:

$$y = \frac{x^4}{16} \quad ; \quad y = xe^x$$

Las EDO también tienen como solución a la función constante:

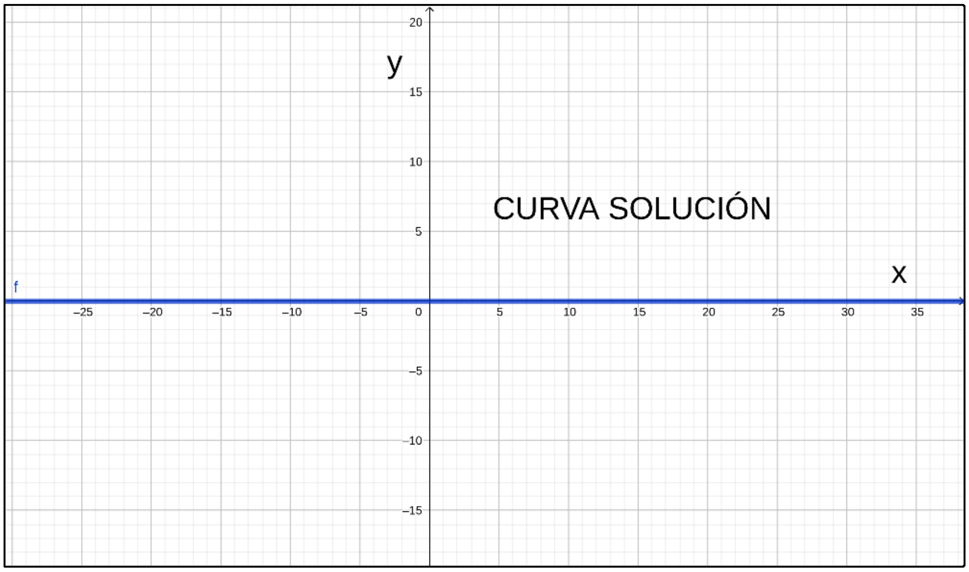
$$y = 0 \quad I = R$$

Una solución de una ED que es igual a cero en un intervalo I, se dice que es la "Solución Trivial".

$y = 0 \quad I = R$

$y(x) = 0$

Curva solución:



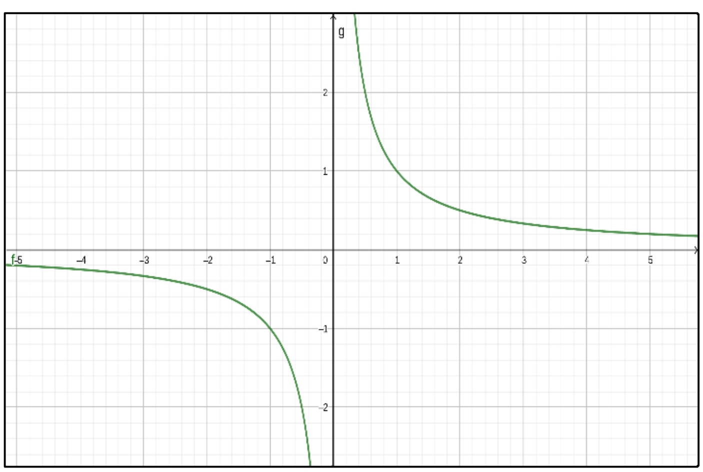
La gráfica de una solución ϕ de una EDO se llama <u>curva solución</u>. Dado que ϕ es derivable, entonces, es una función continua en su intervalo de definición I.

Puede haber diferencia entre la gráfica de la función ϕ y la gráfica de la solución ϕ, es decir, el dominio de la función ϕ no necesita ser igual al intervalo de defínción I de la solución ϕ.

Ejemplo:

Sea la función:

$y(x) = \frac{1}{x}$; La cual tiene dominio en $D = \{x \in R | x \neq 0\}$



1. Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.
2. Si f no es derivable en x_0, entonces f no es continua en x_0.

$y = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$, entonces no es derivable en $x = 0$.

Por otro lado, $y = \frac{1}{x}$ es una solución de la ED:

$$xy' + y = 0$$

Ejercicio:

Sea la ED $xy' + y = 0$

Y la función solución: $y = \frac{1}{x}$

Solución:

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = 0$$

$$-\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore y = \frac{1}{x}$ Es solución de la ED.

Así, cuando decimos que $y = \frac{1}{x}$ es solución de la ED, significa que el intervalo I, la función es derivable y satisface la ecuación diferencial.

$\therefore I$ es cualquier intervalo que no contenga a 0, tal como:

$$(-3, -1)\ , (1, 3), (-\infty, 0), (0, +\infty)$$

Soluciones explicitas o implícitas de una ED.

Función explicita: Es una función en la cual la variable dependiente se expresa sola en términos de la variable independiente y las constantes.

$$y = \phi(x)$$

- "y" es la variable dependiente.
- "x" es la variable independiente

Por lo tanto una solución explicita, se expresa como una función explicita: $y = \phi(x)$

Función implícita: Se dice que una relación $G(x, y) = 0$. Es una solución implícita de una EDO de orden n.

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

En un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación, así como la EDO en I.

Tenemos la relación de la forma:

$$G(x, y) = 0$$

Una ED:

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

En la cual debe existir una función ϕ que satisface la relación:

$$G(x, \phi(x)) = 0$$

Y la ED:

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0$$

Por lo tanto "G" es una solución implícita de la ED "F".

Ejemplo:

La relación: $G(x,y)$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

La cual es una solución implícita de la ED:

$$y' = \frac{-x}{y}$$

En el intervalo $I = (-5,5)$

Sin despejar a la variable "y", derivamos de la siguiente forma para verificar si la relación es solución de la ED:

Derivando a la relación:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 = 25\right) \to \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\to 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Sea la ED: $y' = \frac{-x}{y}$

Despejando a la derivada implícita anterior:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

$\therefore$ La relación es solución de la ED, por que obtenemos la ED como tal.