

Apunte 19

Ecuaciones de tipo lineal homogénea de segundo orden.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

A raíz del discriminante de la Ecu. característica:

$$am^2 + bm + c = 0$$

Suponiendo que la solución es de la forma:

$$y = e^{mx}$$

El cual la solución del polinomio de grado 2 es de la forma:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac$

i. $\Delta > 0$ Raíces reales y distintas.

Las soluciones son de la forma:

$$m_1, m_2 \quad y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}$$

Este conjunto es un conjunto fundamental:

$\{y_1, y_2\}$ Es conjunto fundamental (Si el Wronskiano es $\neq 0$ significa que es l.i.)

Significa que las funciones son soluciones de una ecuación diferencial y l.i.

Definidas en $I = \mathbb{R}$

$$\rightarrow \text{sol general de la ED} \quad y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

ii. $\Delta = 0$ Raíces reales e iguales.

Las soluciones son de la forma:

$$m_1 = m_2 \quad y_1 = e^{m_1 x}$$

Para encontrar la segunda solución distinta de y_1 , la cual es la siguiente:

$$y_2 = xe^{m_1x}$$

Este conjunto es un conjunto fundamental:

$\{y_1, y_2\}$ Es conjunto fundamental (Si el Wronskiano es $\neq 0$ significa que es l.i.)
Significa que las funciones son soluciones de una ecuación diferencial y l.i.

Definidas en $I=\mathbb{R}$

$$\rightarrow \text{sol general de la ED } y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x}$$

Resolver la ecuación ED $\rightarrow y'' - 10y' + 25y = 0$

Esta claro que es lineal homogénea de segundo orden y con coeficientes constantes.

Por lo que la Ecc. característica seria:

$$y = e^{mx} , y' = me^{mx} , y'' = m^2e^{mx}$$

$$m^2e^{mx} - 10me^{mx} + 25e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 - 10m + 25) = 0 \quad e^{mx} \neq 0 \quad \forall x$$

$$\rightarrow m^2 - 10m + 25 = 0 \quad \text{ecc. característica.}$$

Raíces del polinomio:

Factorizando:

$$(m - 5)^2 = 0 \quad \rightarrow m_1 = m_2 = 5$$

Formula general:

$$m = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(25)}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

\therefore Raíces reales e iguales

Las 2 soluciones de la ED son:

$$y_1 = e^{5x} , y_2 = xe^{5x}$$

Sabemos que las 2 soluciones son l.i.; por lo que forman un conjunto fundamental.

Por lo tanto la solución general de la ED:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$$

iii. Raíces Complejas Conjugadas.

$$y = e^{mx}$$

$$am^2 + bm + c = 0 \rightarrow \text{grado 2}$$

$$\Delta < 0$$

$$m_1 = \alpha + i\beta \text{ con } \beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$m_2 = \alpha - i\beta \quad i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$$

Entonces:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Por lo tanto la solución de la ED sería:

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

En nuestro caso:

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$$

$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i \sin(\beta x)$$

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2 \cos(\beta x)$$

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \sin(\beta x)$$

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Tomando $C_1 = C_2 = 1$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

Tomando $C_1 = 1$, $C_2 = -1$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Entonces ya encontramos 2 soluciones, las cuales también van a hacer linealmente independientes, pero para no trabajar con los escalares siempre:

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$\bar{y}_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Conjunto fundamental, lo cual significa que las 2 funciones son soluciones de la ED. Lo cual para saber, podemos sustituirlas en la ED y calcular el Wronskiano, el cual tiene que ser $\neq 0$, además como es conjunto fundamental entonces la solución general:

$$\rightarrow \text{solucion general: } y = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Definido en $I=\mathbb{R}$

Donde la Ecc. Característica tiene 2 raíces reales y distintas.

Resolver $y'' + 4y' + 7 = 0$

Ecc. característica:

$$m^2 + 4m + 7 = 0$$

Las Raíces son:

Formula general:

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2}$$

El discriminante es menor a cero, por lo que:

$$m = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -2 \pm \sqrt{3}i$$

$$m_1 = -2 + \sqrt{3}i \quad , \quad m_2 = -2 - \sqrt{3}i$$

$$m_1 = \alpha + i\beta$$

$$\alpha = -2 \quad , \quad \beta = \sqrt{3}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) = e^{-2x} \cos(\sqrt{3}x)$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x) = e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x)$$

Conjunto
Fundamental

Solución general:

$$y = C_1 \left(e^{-2x} \cos(\sqrt{3}x) \right) + C_2 \left(e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x) \right)$$

Obtener ecuación característica de la ED:

$$y'' + 4y' + 7 = 0$$

$$y = e^{mx} \quad , \quad y' = me^{mx} \quad , \quad y'' = m^2e^{mx}$$

$$e^{mx}m^2 + 4me^{mx} + 7e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + 4m + 7) = 0 \quad e^{mx} \neq 0 \quad \forall x$$

$$m^2 + 4m + 7 = 0$$

∴ La ecuación característica es:

$$m^2 + 4m + 7 = 0$$

Resolver $4y'' + 4y' + 17y = 0$ $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

Ecc. característica: $4m^2 + 4m + 17 = 0$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16(17)}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{16(1 - 17)}}{8}$$

$$= \frac{-4 \pm 4 * 4i}{8} = \frac{-1}{2} \pm 2i$$

$$m_1 = \frac{-1}{2} + 2i$$

$$m_2 = \frac{-1}{2} - 2i$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad , \quad \beta = 2$$

Solución:

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x) \quad , \quad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x)$$

Solución general:

$$y = C_1 \left(e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x) \right) + C_2 \left(e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x) \right)$$

Dada las condiciones iniciales:

$$-1 = y(0) = C_1(e^{-0} \cos(0)) + C_2(e^{-0} \sin(0)) = C_1 * 1 * 1 = C_1 \rightarrow C_1 = -1$$

$$y' = C_1 \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x) - e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x) * 2 \right) + C_2 \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x) + e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x) * 2 \right)$$

$$2 = y'(0) = -1 \left(-\frac{1}{2} \right) + C_2(2) \rightarrow C_2 = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

El PVI tiene como solución:

$$y = -e^{-\frac{x}{2}} \cos(2x) + \frac{3}{4} e^{-\frac{x}{2}} \sin(2x) \quad I = \mathbb{R}$$

Ecuaciones de Orden Superior.

ED lineal de orden n, homogénea y con coeficientes constantes.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \dots \quad (**)$$

Ecc. característica: $y = e^{mx}$

$$a_n m^{(n)} + a_{n-1} m^{(n-1)} + \dots + a_1 m + a_0 m = 0 \quad \dots \quad (*)$$

Resolver una ecc. polinomial de orden n.

$$y^{(4)} + 3y^{(3)} - 4y^{(2)} + y' - y = 0$$

Ecc. Característica:

$$m^4 + 3m^3 - 4m^2 + m - 1 = 0$$

Si todas las raíces de (*) son reales y distintas, entonces la solución general de la ED (**) es:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$

Supongamos que m_1 es una raíz de multiplicidad \underline{K} de la ecuación característica.

$$\begin{array}{c} \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ m_1 \quad m_2 \end{array}$$

Entonces: las siguientes soluciones son l.i.

$$\underbrace{e^{m_1 x}}_1, \quad \underbrace{x e^{m_1 x}}_2, \quad \underbrace{x^2 e^{m_1 x}}_3, \quad \dots, \quad \underbrace{x^{k-1} e^{m_1 x}}_k$$

\therefore La solución general debe contener la combinación lineal:

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_1 x} x + C_3 x^2 e^{m_1 x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{m_1 x}$$