

Apunte 18

Considerar el siguiente conjunto:

$$\{f_1(x) = \cos^2(x), f_2(x) = \sin^2(x), f_3(x) = \sec^2(x), f_4(x) = \tan^2(x)\}$$

¿Este conjunto de funciones es “l.i” o “l.d”?

¿Hay alguna relación entre este conjunto de funciones?

Verificando las relaciones:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x\end{aligned}$$

Dada las relaciones anteriores, ¿existen escalares diferentes de 0, de tal manera que se tenga la siguiente relación?

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \sin^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$$

Sea:

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$1 + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$$

¿Cuáles serían los valores de las constantes c_3 y c_4 para que la combinación sea 0?

Si:

$$c_3 = -1, c_4 = 1$$

$$1 - \sec^2 x + \tan^2 x = \sec^2 x - \sec^2 x = 0$$

$$\therefore c_1 = c_2 = c_4 = 1, c_3 = -1 \text{ son } \neq 0$$

\therefore El conjunto es l.d.

Porque existen coeficientes diferentes de 0, de manera que sea igual a cero el conjunto.

Por lo tanto, demostrar que un conjunto es linealmente dependiente o independiente no es tan sencillo. Dependen las funciones.

Definición Wronskiano:

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, suponemos que tienen al menos $n-1$ derivadas. El determinante denotado como:

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Donde las primas denotan derivadas, se llaman Wronskiano de las funciones.

Calcular el Wronskiano del conjunto $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \\ e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$= -2e^{6x} - 12e^{6x} - 9e^{6x} + 18e^{6x} + 4e^{6x} + 3e^{6x} \\ = 2e^{6x}$$

Teorema: Criterio para soluciones l.i.

Sean y_1, y_2, \dots, y_n n (funciones) \rightarrow soluciones de la ED lineal homogénea de n -ésimo orden de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Sean definidas en el intervalo I .

El conjunto de soluciones es linealmente independiente en I ssi:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

El conjunto de funciones es linealmente independiente en I ssi:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = 0 \quad \text{Para algún } x_0 \in I.$$

Definición: Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de n soluciones l.i. de la ED lineal homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones en I .

Si hablamos de un conjunto fundamental de soluciones, ¿Que ED lineal homogénea tiene un conjunto fundamental?

Teorema: Existencia de un conjunto fundamental.

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ED lineal homogénea de n -ésimo orden en I .

Teorema: Solución general de las ecuaciones homogéneas

Sean:

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

Un conjunto fundamental (l.i.) de soluciones de la ED homogénea de n -ésimo orden en I . Entonces la SOLUCIÓN GENERAL de la ecuación en I , es:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

donde $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ son constantes arbitrarias.

Ejemplo 1: Sea la ED lineal homogénea de segundo orden.

$$y'' - 9y = 0$$

Las funciones: $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ED. (Ejercicio; demostrar que son soluciones de la ED).

Demostración: $y_1 = e^{3x}$

$$\begin{aligned} 9e^{3x} - 9(e^{3x}) &= 0 \\ 9e^{3x} - 9e^{3x} &= 0 \end{aligned}$$

Demostración: $y_1 = e^{-3x}$

$$\begin{aligned} 9e^{-3x} - 9(e^{-3x}) &= 0 \\ 9e^{-3x} - 9e^{-3x} &= 0 \end{aligned}$$

\therefore son soluciones de la ED.

¿En que intervalo I pueden estar definidas las 2 funciones anteriores?

$$I = \mathbb{R}$$

¿ y_1, y_2 , forman un conjunto fundamental?

El conjunto de soluciones es linealmente independiente en I ssi:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

→ Calcular el Wronskiano del conjunto $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$

$$\begin{aligned} W(e^{3x}, e^{-3x}) &= \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\ &= -3 - 3 = -6 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

∴ $\{y_1, y_2\}$ Forman un conjunto l.i.

→ $\{y_1, y_2\}$ Son un conjunto fundamental de soluciones:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} \text{ Solución general de la ED.}$$

ED lineales homogéneas con coeficientes constantes.

*Si la ED es de orden n, significa: $\rightarrow a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Todos los a_i son constantes, no dependen de "x".

*Si la ED es de orden 1 (uno): $a_1 y' + a_0 y = 0$ *****

(homogénea, lineal), necesitamos que: $\{a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ y $a_1 \neq 0$; si $a_1=0$ la ED ya no es de 1er orden.

Dado que: $a_1 \neq 0$

$$y' = -\frac{a_0}{a_1} y = ky \quad ; \quad K = -\frac{a_0}{a_1}$$

Resolver: $y' = ky$

$$y = e^{mx}, y' = me^{mx}$$

Sustituir en $a_1 y' + a_0 y = 0$

$$a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$$

Factorizando la EXP

$$e^{mx} (a_1 m + a_0) = 0$$

Dado que $e^{mx} \neq 0 \forall x$

$$\rightarrow a_1 m + a_0 = 0$$

Podemos deducir que para encontrar una solución de la ED (****), suponiendo que las soluciones sean de $y=e^{mx}$, significa que de resolver una ED, reducimos el problema a resolver una ecuación algebraica de 1er grado.

$\rightarrow a_1 m + a_0 = 0$ Ecc. Algebraica de 1er grado, donde la incognita es “m”

$$m = -\frac{a_0}{a_1} \rightarrow y = e^{-\frac{a_0}{a_1}x} \text{ Es solución de la ED.}$$

Esta ED de 1er orden se puede resolver a través del factor integrante ó por variables separables.

ED lineal homogénea de 2do orden:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Suponiendo que $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2 e^{mx}$

$$e^{mx} (am^2 + bm + c) = 0$$

$$\rightarrow am^2 + bm + c = 0$$

Ecc. Característica (auxiliar) de la ecuación.

Resolver la ecc. característica:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo que:

$$\rightarrow m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discriminante es $\rightarrow b^2 - 4ac$

1. $(b^2 - 4ac > 0)$, m_1 y m_2 son reales y distintos.
2. $(b^2 - 4ac = 0)$, m_1 y m_2 son reales e iguales.
3. $(b^2 - 4ac < 0)$, m_1 y m_2 son complejos conjugados.

Caso i) Raíces reales y distintas.

$$m_1 \neq m_2$$

Entonces dos soluciones de la ED

$$y_1 = e^{m_1 x} \text{ y } y_2 = e^{m_2 x}$$

$\{y_1, y_2\}$ Es l.i. en $I=\mathbb{R}$; \therefore es un conjunto fundamental, la solución general de la ED.

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Caso ii) Raíces reales e iguales.

$$m_1 = m_2$$

Una solución de la ED es $y_1 = e^{m_1 x}$ y la segunda $y_2 = x e^{m_1 x}$, $\{y_1, y_2\}$ es l.i. en $I=\mathbb{R}$, es conjunto fundamental.

Solución general:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$