Apunte 17

Problemas con Valores Iniciales

Resolveremos ecuaciones diferenciales que satisfagan ciertas condiciones de orden mayor a 1.

Para una ecuación diferencial lineal, un PVI de n-ésimo orden es:

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)$$

Sujeto a:

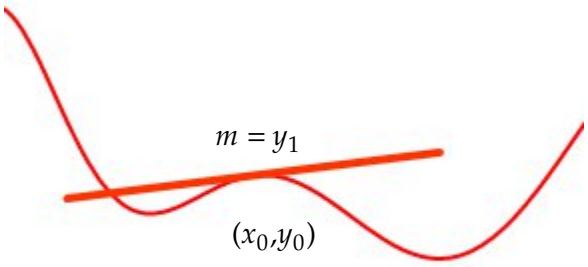
$$y(x_0) = y_0\,,\; y'(x_0) = y_1\,,\; y''(x_0) = y_2\,,\; \ldots\,,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Objetivo: Buscar una función definida en algún intervalo I, que contiene a x_0 , que satisface la ED y las "n" condiciones iniciales.

$$a_2(x)\,y^{(2)} + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)$$

$y(x_0) = y_0$
$y'(x_0) = y_1$

El numero de condiciones iniciales coincide con el grado de la ecuación diferencial. En este caso son 2. Lo que quiere decir que estamos buscando una función que satisfaga la ecuación diferencial y estas dos condiciones iniciales. Geométricamente en la primera condición significa que en la curva solución de la función que es solución de la ecuación diferencial debe contener al punto x_0, y_0, lo cual se traduce que la función evaluada en x_0 sea igual a y_0. En la segunda condición representa la derivada evaluada en x_0, lo cual significa que la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de la función en el punto x_0, lo que significa que la recta tiene pendiente igual a y_1.



Teorema: Existencia y Unicidad de una solución única.

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$, continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

Si x_0 es cualquier punto en I, entonces una solución $y(x)$ del PVI existe en I y es única.

Ejemplo 1: Sea la ED lineal de 3er orden.

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0 \qquad y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$$

Las funciones:

$$a_3(x) = 3$$
$$a_2(x) = 5$$
$$a_1(x) = -1$$
$$a_0(x) = 7$$
$$g(x) = 0$$

Son continuas en I=R

Por otro lado la función:

$$a_3(x) = 3 \neq 0 \qquad \forall x \in I$$

$\rightarrow \quad \therefore$ la solución del PVI trivial $y = 0$ es la <u>única</u> solución del PVI por el teorema anterior.

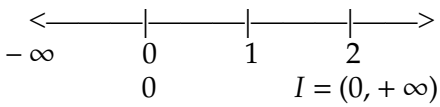
Ejemplo 2: Sea la ED lineal de 3er orden.

$$3xy''' + 5y'' - y' + 7y = 0 \qquad y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$$

$a_3(x) = 3x$ Es continua en I=R

$$a_3(x) = 3x = 0 \quad ssi \quad x = 0 \in I = R$$

La solución del PVI, en caso de existir, es única para cualquier intervalo I que contenga a $x_0 = 1$ para que no contenga a $x = 0$



Ejemplo 3: Sea la ED:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6 \qquad y(0) = 3 \;\; , \;\; y'(0) = 1$$

La función $y = cx^2 + x + 3$ es una solución al PVI

Evaluando la función en $y(0) = 3$

$$y(0) = c0^2 + 0 + 3 = 3$$

Evaluando la derivada de la función en $y'(0) = 1$

$$y'(x) = 2xc + 1 \;\; , \;\; y'(0) = 1$$

Una vez obteniendo la solución del PVI, ¿ "y" es solución única? La solución no es <u>única</u>

$a_2(x) = x^2$

$a_1(x) = -2x$

$a_0(x) = 2$

$g(x) = 6$

Son continuas en I=R

Con $x_0 = 0 \in I$

$a_2(x) = x^2 = 0 \quad ssi \quad x = 0$

Entonces la solución, en caso de existir, es única en cualquier intervalo I que contenga a $x_0 = 0$, pero que no contenga a 0, ya que es donde la función a_2 se anula, lo cual es una contradicción $\#^C$.

Por lo tanto la solución para este PVI no es única. Puede haber mas soluciones y las soluciones dependen de los valores de C.

Ecuaciones Homogéneas

Una ED lineal de n-ésimo orden de la forma:

$$a_n(x)\,y^{(n)} a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)y = 0$$

Se dice que es HOMOGÉNEA, mientras que una ED de la forma:

$$a_n(x)\,y^{(n)} a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = g(x)$$

Con $g(x) \neq 0$ se dice que es NO - HOMOGÉNEA.

Ejemplos:

ED lineal de segundo orden - homogénea:

$$2y'' + 3y' - 5y = 0$$

ED lineal de tercer orden - no Homogénea:

$$x^2y''' + 6y' + 10y = e^x$$

Principio de Superposición. , Ecuaciones homogéneas.

Sean $y_1,y_2,\ldots,y_k$ soluciones de la ED homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces la combinación lineal:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x)$$

Donde $C_i \quad i = 1, \ldots, K$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo I.

Tenemos una ED homogénea de orden "n", encontramos no una solución, sino "k" soluciones de esa ED, si realizamos la combinación lineal, obtenemos una nueva función la cual también es solución de la ED definida en el mismo intervalo.

Ejemplo 1: Sea la ED lineal - homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$$

Suponer que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ED.

Que sean soluciones significa que al sustituir a estas funciones en la ED cada una se satisface la igualdad.

$$\begin{cases} a_2(x)\,y_1'' + a_1(x)\,y_1' + a_0(x)\,y_1 = 0 \\ a_2(x)\,y_2'' + a_1(x)\,y_2' + a_0(x)\,y_2 = 0 \end{cases}$$

El teorema anterior, dice que si consideramos cualquier combinación lineal, esta nueva función es solución de la ED:

$$\rightarrow\ y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\ \text{Es solución de la ED}$$

Tenemos que verificar, que si al sustituir en la ED se satisface la igualdad, es decir:

$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = ?\ 0$$

Esta expresión es igual a 0?, pero "y" esta definida como la suma de las funciones:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Lo cual por linealidad de la derivada sera igual a:

$$a_2(x)\left(c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x)\right) + a_1(x)\left(c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)\right) + a_0(x)\left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right)$$

Pero nosotros queremos que esto sea igual a 0 por lo que tenemos que agrupar todo lo que depende de y_1 y sus derivadas, lo cual podemos factorizar a c_1 y c_2:

$$= c_1\left(a_2(x)\,y_1'' + a_1(x)\,y_1 + a_0(x)\,y_1\right) + c_2(a_2(x)\,y_2'' + a_1(x)\,y_2' + a_0(x)y_2)$$

Como y_1 y y_2 son soluciones de la ED, tenemos que todo lo que multiplica a c_1 y c_2, son iguales a 0 quedaría de la forma:

$$= c_1 0 + c_2 0 = 0 \quad \therefore\ y \text{ Es solución de la ED.}$$

Ejemplo 2: Sea la ED lineal de tercer orden:

$$x^2 y''' - 2xy' + 4y = 0$$

Las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln(x)$ son soluciones de la ED homogénea definida en $I = (0, +\infty)$

Por el principio de superposición (encontrar una solución extra a la ED), tenemos que la combinación lineal:

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 ln(x)$$

Es también una solución de la ED en I. Lo cual c_1 y c_2 son cuales quiera escalares, por lo tanto podemos dar 2 soluciones más:

$$\left.\begin{aligned} y &= 1x^2 + 2x^2 ln(x) \\ y &= \pi x^2 - \sqrt{2}x^2 ln(x) \end{aligned}\right\} \text{ Son soluciones de la ED}$$

Resumen: La ED:

$$x^3y'' - 2xy' + 4y = 0$$

Teníamos 2 soluciones:

$$y_1 = x^2 \quad y^2 = x^2\,ln\,(x) \;\text{ Soluciones de la ED en } I = (0, +\infty)$$

Teníamos que cualquier combinación lineal por el principio de superposición sera solución también de la ED.

$$y = c_1x^2 + c_2x^2\,ln\,(x) \;\text{ Es solución de la ED}$$

$y = 2x^2 + 1x^2ln(x)$ Esta combinación lineal también es una solución en el intervalo I.

$y = -\pi x^2 + \sqrt{2}\,x^2ln(x)$ Esta combinación lineal también es una solución en el intervalo I.

Dependencia e Independencia lineal.

Definición: Se dice que un conjunto:

$$\{f_1\,(x)\,,f_2\,(x)\,,...,f_n(x)\}$$

Es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes $c_1,c_2,...,c_n$ no todas cero, tales que:

$$c_1f_1\,(x) + c_2f_2\,(x) + ... + c_nf_n\,(x) = 0 \qquad \forall\, x \in I$$

Un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo I, si las únicas constantes para las que:

$$c_1f_1\,(x) + c_2f_2\,(x) + ... + c_nf_n\,(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$$

Son:

$$c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

$$\{f_1(x),\, f_2(x)\}$$

Si el conjunto es l.d en I, entonces existen constantes $c_1,\, c_2$ que no son ambas cero

$$c_1f_1\,(x) + c_2f_2\,(x) = 0 \qquad \forall\, x \in I$$

Suponer $c_1 \neq 0$

$$\rightarrow f_1(x) = -\frac{c_2 f_2(x)}{c_1}$$

$\therefore$ Un conjunto de 2 funciones es l.d si una función es un múltiplo constante del otro.

$$\{ f_1(x) = \sin(2x),\ \ f_2(x) = \sin x \cos x \}$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

$$1\sin(2x) - 2\cos(x)\sin(x) = 0$$

$$c_1 = 1 \ \ , \ \ c_2 = -2$$

$\rightarrow$ El conjunto es l.d $(f_1(x) = 2f_2(x))$

El conjunto $\{f_1, f_2\}$ es l.i, cuando ninguna función es un múltiplo constante de la otra.

$$\{f_1(x) = x \ , \ f_2(x) = |x|\}$$

Si el conjunto es l.d habrá que encontrar dos escalares de manera que alguno de estos escalares sea diferente de cero y se satisfaga la igualdad. Si el conjunto es l.i habría que demostrar que esos dos escalares son 0.

En otras palabras, como tenemos un conjunto de 2 funciones sera l.d si una función es múltiplo de la otra, lo cual significaría que sea igual a una constante ó que una función no sean múltiplo de la otra función.

$$c_1 x + c_2 |x| = 0$$