Apunte 16

¿Cuándo una ED es homogénea?, en caso de serlo, podemos tomar un cambio de variable para hacer la ED separable.

ED de la forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

- EDO de 1er orden.
- Si la ED es separable, podemos utilizar variables separables y resolver la ED.
- En caso de ser exacta, utilizamos un método, para encontrar la función de 2 variables, de tal forma que esta función esta denotada como:

$$\psi(x,y)$$

Satisface lo siguiente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y)$$

Nota: Solo en caso de que la ecuación diferencial – ED – sea separable o exacta.

Cabe la posibilidad de que la ED no sea exacta, en el cual podemos encontrar el factor integrante, de manera que la ED hagamos que sea exacta. Ese factor integrante debe depender de “x” o de “y”. Por el cual podemos resolver multiplicando a la ED por el factor integrante, por lo cual la ED será exacta.

Si la ED a resolver no es exacta y tampoco de variables separables, sino que es una ED homogénea. En el cual para que se homogénea, M y N deben ser ecuaciones homogéneas del mismo grado, suponiendo que son de grado α

Por lo que al ser ecuaciones homogéneas de grado α , obtenemos que:

$$M(tx,ty) = t^{\alpha} M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = t^{\alpha} N(x,y)$$

Dado que las ecuaciones son homogeneas, hay 2 cambios de variable:

$$u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow M(x,y) = x^{\alpha} M(1,u) \;\; , \;\; N(x,y) = x^{\alpha} N(1,u)$$

$$v = \frac{x}{y} \quad \rightarrow M(x,y) = y^{\alpha} M(v,1) \;\; , \;\; N(x,y) = y^{\alpha} N(v,1)$$

Al utilizar cualquiera de los 2 cambios de variable anteriores, al sustituir en nuestra ED original obtendremos una ecuación de variables separables. Solo habra que verificar que la ED se homogenea del mismo grado (M y N homogeneas del mismo grado).

Uilizando alguno de estos cambios de variable en la EDO obtendremos una EDO separable. En la cual para resolver podemos utilizar los terminos de “u” o ”v”, dependiendo el cambio de variable utilizado. Despues, al encontrar quien es la función “u” o “v”, despejamos a “y” y obtenemos la función que resuelve (solución) la EDO.

Ejemplo 1: Sea la ED:

$$\left(x^2 + y^2\right) dx + \left(x^2 - xy\right) dy = 0$$

Las funciones son:

$$M(x,y) = x^2 + y^2$$

$$N(x,y) = x^2 - xy$$

Entonces, verificamos si estas funciones son homogeneas y si son del mismo grado:

$$M(tx,ty) = t^2 M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = t^2 N(x,y)$$

Por lo que las funciones son homogeneas de grado 2. Entonces como M y N son de grado 2, la ED es homogenea.

Hay 2 cambios de variables:

$$u = \frac{y}{x} \qquad o \qquad v = \frac{x}{y}$$

En este caso utilizaremos y = ux: , $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = u\frac{dx}{dx} + x\frac{du}{dx} \quad \therefore dy = udx + xdu$

$$dy = xdu + udx$$

Entonces sustituyendo el cambio de variable se obtiene:

$$\left(x^2 + u^2x^2\right) dx + \left(x^2 - x^2u\right) [xdu + udx] = 0$$

Asociando todo lo que depende del diferencial de x y de u:

$$\left(x^2+u^2x^2+x^2u-x^2u^2\right)dx+\left(x^3-x^3u\right)du=0$$

$$\left(x^2+x^2u\right)dx+\left(x^3-x^3u\right)du=0$$

Factorizando:

$$x^2\,(1+u)\,dx+x^3\,(1-u)\,du=0$$

Esta nueva EDO ahora es separable, por lo cual seria igual a:

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-u)}{(1+u)}du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\left(-1+\frac{2}{1+u}\right)du=0$$

Integramos:

$$\int\frac{1}{x}dx+\int-1+\frac{2}{1+u}du$$

La solución general de la EDO separable es:

$$ln\,|x|-u+2ln\,|1+u|=C_1$$

$u=\frac{y}{x}$

Sustituyendo:

$$-\frac{y}{x}+ln\,|x|+2ln\left|1+\frac{y}{x}\right|=ln\,|C|$$

$$-\frac{y}{x}+ln\,|x|+2ln\left|1+\frac{y}{x}\right|-ln\,|C|=0$$

$$-\frac{y}{x}+ln\left|\frac{x}{c}\right|+ln\left|\left(\frac{x+y}{x}\right)^2\right|=0$$

$$-\frac{y}{x}+ln\left|\frac{x}{c}\left(\frac{x+y}{x}\right)^2\right|=0$$

$$ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right|=\frac{y}{x}$$

$$\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right|=e^{\frac{y}{x}}$$

$$(x+y)^2=\pm\,cxe^{\frac{y}{x}}$$

Por lo tanto la solución general de la EDO (homogenea) es:

$$(x+y)^2 = kxe^{\frac{y}{x}}$$

$$k = \pm c$$

Ejemplo 2: Sea la ED:

$$\left(x^3 + y^3\right)dx - xy^2dy = 0$$

Las funciones son:

$$M(x,y) = x^3 + y^3$$

$$N(x,y) = -xy^2$$

Entonces, verificamos si estas funciones son homogeneas y si son del mismo grado:

$$M(tx,ty) = t^3M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = t^3N(x,y)$$

Por lo que las funciones son homogeneas de grado 3. Entonces como M y N son de grado 3, la ED es homogenea.

Hay 2 cambios de variables:

$$u = \frac{y}{x} \qquad o \qquad v = \frac{x}{y}$$

En este caso utilizaremos y = ux: , $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = u\frac{dx}{dx} + x\frac{du}{dx} \quad \therefore dy = udx + xdu$

$$dy = xdu + udx$$

Entonces sustituyendo el cambio de variable se obtiene:

$$\left(x^3 + x^3u^3\right)dx \ - \ x^3u^2\left[udx + xdu\right] = 0$$

Asociando todo lo que depende del diferencial de x y de u:

$$\left(x^3 + x^3u^3 - x^3u^3\right)dx \ - \ x^4u^2du = 0$$

$$\left(x^3\right)dx \ - \ x^4u^2du = 0$$

Esta nueva EDO ahora es separable, por lo cual seria igual a:

$$\frac{dx}{x} = u^2du$$

Integramos:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int u^2 du$$

$$ln\,|x| + C = \frac{u^3}{3}$$

$u = \frac{y}{x}$

$C = ln\,|A|$

Sustituyendo:

$$ln\,|x| + ln\,|A| = \frac{y^3}{3x^3}$$

$$y^3 = 3x^3 (ln\,|xA|\,)$$

Por lo tanto la solución general de la EDO (homogenea) es:

$$y = \left(3x^3 ln\,|xA|\right)^{\frac{1}{3}}$$

Si:

$$y = x\,(3\;ln\,|Ax|)^{\frac{1}{3}}$$

A es una constante no cero.

1. Si A>0 -> entonces el dominio de y es $(0, +\infty)$
2. Si A<0 -> entonces el dominio de y es $(-\infty, 0)$

$y = 0$ Es solución de la ED? No.

Ecuación de Bernoulli

Esta dada por: $\frac{dy}{dx} + p\,(x)\,y = Q(x)y^n$

ED es de 1er orden.

Es lineal si n=0 o n=1

Si $n \neq 0$ y 1. La ED no es lineal.

Utilizando el cambio de variable para construir o obtener una ED lineal.

$$z = y^{1-n}$$

Para cualquier ED de bernoulli este sera el cambio de variable que vamos a considerar.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{1-n})}{dx} = (1-n)\,y^{-1n}\frac{dy}{dx}$$

En terminos con notación prima:

$$z' = (1-n)y^{-n}y'$$

Utilizaremos esto para sustituir la derivada de z prima:

$$z = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n)y^{-n}y'$$

Dividimos a la ED:

$$\frac{dy}{dx} + p\,(x)\,y = Q(x)y^{n}$$

entre y^-n:

$$y^{-n}\ \frac{dy}{dx} + p\,(x)\,y^{1-n}\ = Q(x)$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\frac{1}{1-n}z' + p\,(x)\,z = Q(x)$$

$$z' + (1-n)\,p\,(x)\,z = (1-n)Q(x)$$

EDO lineal de 1er orden.

Ejemplo 1: Resolver:

$$y' + xy = xy^{3}$$

$p\,(x) = x$

$Q\,(x) = x$

$n = 3$

Tomando:

$z = y^{1-n} = y^{-2}$

$z' = -2y^{-3}y'$

Reescribiendo la ED tendriamos:

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = x$$

$$\frac{z'}{-2} + xz = x \quad , \quad \boldsymbol{z' - 2xz = -2x} \quad \textbf{lineal}$$

Factor integrante:

$$e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

$$z'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}z = -2xe^{-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}z\right) = -2xe^{-x^2}$$

Integrando:

$$e^{-x^2}z = -\int 2xe^{-x^2}dx + C$$

$$e^{-x^2}z = e^{-x^2} + C$$

$$z = 1 + ce^{x^2}$$

Esta función es la sol de la ED lineal que obtuvimos con el cambio de variable. Pero queremos resolver la de bernoulli.

$$z = \frac{1}{y^2} \quad , \quad y^2 = \frac{1}{z}$$

$$y^2 = \frac{1}{1 + ce^{x^2}}$$

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + ce^{x^2}}}$$

Esta es la sol a la ecuación de bernoulli, pero no es la unica sol. Ya que una con signo negativo y otra con signo negativo.

Dominio : $(-\infty, \infty)$ $\{c | c \in R\}$

Ejemplo 2: Resolver:

$$xy' + y = x^2y^2$$

Reescribir a la ED → $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$

$p(x) = \frac{1}{x} \quad Q(x) = x \quad n = 2$

$z = y^{1-n} = y' \qquad , \qquad z' = -1y^{-2}y'$

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

$$-z' + \frac{1}{x}z = x$$

$$\boldsymbol{z' - \frac{1}{x}z = -x} \quad \textbf{lineal}$$

Factor integrante:

$$e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-ln|x|} = e^{ln|x^{-1}|} = |x^{-1}|$$

Supongamos:

$$x > 0 \quad = x^{-1}$$

$$x^{-1}z' - x^{-2}z = -1$$

$$\frac{d}{dx}\left(-x^{-2}z\right) = -1$$

Integrando:

$$-x^{-2}z = -\int 1\,dx + C$$

$$-x^{-2}z = - x - C$$

$$z = x^3 + cx^2$$

$$z = \frac{1}{y^2} \quad , \quad y^2 = \frac{1}{z}$$

$$y^2 = \frac{1}{x^3 + cx^2}$$

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^3 + cx^2}}$$