

Apunte 15

Resolver una EDO transformándola en otra EDO, mediante una sustitución.

$$y' = f(x, y)$$

Si $y = g(x, u)$, donde “u” es una función que depende de “x”, y suponiendo que “g” tiene primeras derivadas parciales.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = g_x + g_u \frac{du}{dx}$$

Entonces:

$$g_x + g_u \frac{du}{dx} = f(x, g(x, u))$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{F(x, u) - g_x}{g_u} = G(x, u)$$

$$\frac{du}{dx} = G(x, u)$$

Ejemplo:

Resolver $y'' - 2y' = 5$

Considerare: $u(x) = y'(x)$, $u'(x) = y''(x)$

Entonces:

$$u' - 2u = 5$$

Dada la nueva ED, resolverla a partir del factor integrante:

$$e^{\int p(x) dx} = e^{-\int 2u dx} = e^{-2x}$$

Multiplicamos la ED con el factor integrante obtenido:

$$e^{-2x}u' - 2e^{-2x}u = 5e^{-2x}$$

Nota: El factor integrante transforma nuestra ED, de manera que de lado izquierdo sea la derivada del producto de 2 funciones.

$$\frac{d}{dx}(ue^{-2x}) = 5e^{-2x}$$

Integrando:

$$ue^{-2x} = \int 5e^{-2x} = -\frac{5}{2}e^{-2x} + C$$

$$ue^{-2x} = -\frac{5}{2}e^{-2x} + C$$

Obtenemos que:

$$\rightarrow u = -\frac{5}{2}e^{-2x}(e^{2x}) + C(e^{2x}) = -\frac{5}{2} + Ce^{2x}$$

$$\rightarrow u = -\frac{5}{2} + Ce^{2x} \quad C \in R$$

Así decimos que:

La función $\rightarrow u = -\frac{5}{2} + Ce^{2x}$, es solución de la ED $\rightarrow u' - 2u = 5$

Pero nosotros queremos resolver la ED de segundo orden, entonces tenemos que:

$$y' = u$$

$$\rightarrow y = \int u \, dx = \int -\frac{5}{2} + Ce^{2x} \, dx = -\frac{5}{2}x + \frac{ce^{2x}}{2} + C_1$$

Ahora sí, tenemos que la función “y” es la solución de la ED:

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{ce^{2x}}{2} + C_1$$

Ecuación homogénea: Si una función f tiene la propiedad:

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Para algún número real α , entonces decimos que f es una función homogénea de grado α .

Para toda función que satisfaga la igualdad:

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Ejemplo 1:

Sea la función:

$$f_1(x, y) = x^3 + y^3$$

Pregunta: ¿Esta función es homogénea?, en caso de serlo, ¿Cuál es su grado?

Comprobamos si la función es homogénea evaluándola en $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$:

$$f_1(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f_1(x, y)$$

$$f_1(tx, ty) = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f_1(x, y)$$

R = En este caso f_1 es homogénea de grado 3.

Ejemplo 2: Sea la función:

$$f_2(x, y) = x^3 + y^3 + 2$$

Pregunta: ¿Esta función es homogénea?, en caso de serlo, ¿Cuál es su grado?

Iniciamos sustituyendo a la función en $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$:

$$f_2(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 + 2 = t^3(x^3 + y^3) + 2 \neq t^3 f_2(x, y)$$

$$f_2(tx, ty) = t^3(x^3 + y^3) + 2 \neq t^3 f_2(x, y)$$

R = En este caso f_2 es NO homogénea.

Ejemplo 3: Sea la función:

$$f_3(x, y) = 3x^6 + 5x^4y^2$$

Pregunta: ¿Esta función es homogénea?, en caso de serlo, ¿Cuál es su grado?

Evaluando la función en $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$:

$$f_3(tx, ty) = 3(tx)^6 + 5(tx)^4(ty)^2$$

$$f_3(tx, ty) = 3t^6x^6 + 5t^4x^4t^2y^2$$

$$f_3(tx, ty) = t^6(3x^6 + 5x^4y^2) = t^6f_3(x, y)$$

R = En este caso f_3 es homogénea de grado 6.

Ejemplo 4: Sea la función:

$$f_4(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Pregunta: ¿Esta función es homogénea?, en caso de serlo, ¿Cuál es su grado?

Evaluando la función en $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$:

$$f_4(tx, ty) = \operatorname{sen}\left(\frac{tx}{ty}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = t^0 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = t^0 f_4(x, y)$$

$$f_4(tx, ty) = t^0 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = t^0 f_4(x, y)$$

R = En este caso f_4 es homogénea de grado 0.

Ejemplo 5: Sea la función:

$$f_5(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

Pregunta: ¿Esta función es homogénea?, en caso de serlo, ¿Cuál es su grado?

Evaluando la función en $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$:

$$f_5(tx, ty) = \frac{1}{tx + ty} = \frac{1}{t(x + y)} = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{x + y} \right)$$

$$f_5(tx, ty) = t^{-1} f_5(x, y)$$

R = En este caso f_5 es homogénea de grado -1.

Si $f(x, y)$ es homogénea de grado 0, entonces f es una función $\rightarrow \frac{y}{x}$.

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y) \quad \forall t \in R$$

Si $t = \frac{1}{x}$

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y) \rightarrow f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Ejemplo 6: Sea la función:

$$f_6(x, y) = \frac{\sqrt{5x^2 + y^2}}{x}$$

Verificar que sea de grado 0.

Evaluando la función en $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$:

$$f_6(tx, ty) = \frac{\sqrt{5t^2x^2 + t^2y^2}}{tx} = \frac{t\sqrt{5x^2 + y^2}}{tx} = t^0 f_6(x, y)$$

$\therefore f_6$ Es homogénea de grado 0.

Escribimos ahora la función $f_6(x, y) = \frac{\sqrt{5x^2 + y^2}}{x}$, en términos de $\frac{y}{x}$.

Usando: $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

Entonces:

$$f_6(x, y) = f_6\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{5(1) + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{1} = \sqrt{5 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Por lo tanto queda demostrado que la función de grado 0 está escrita en términos de una función que depende de $\frac{y}{x}$, la cual es la misma función.

Ejemplo 7: Sea la función:

$$f_7(x, y) = \frac{y^3 + x^2y}{x^2y + x^3}$$

Es homogénea y de grado 0.

Demostración: Verificar que es de grado 0.

Evaluando la función en $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$:

$$f_7(tx, ty) = \frac{t^3y^3 + t^2x^2ty}{t^2x^2ty + t^3x^3} = \frac{t^3y^3 + t^3x^2y}{t^3x^3 + t^3x^2y} = \frac{t(y^3 + x^2y)}{t(x^3 + x^2y)} = t^0 f_7(x, y)$$

$\therefore f_7$ Es homogénea de grado 0.

La función $f_7(x, y)$, la podemos escribir en términos de $\frac{y}{x}$.

$$f_7(x, y) = f_7\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Si:

$$f_7(x, y) = \frac{y^3 + x^2y}{x^2y + x^3}$$

Entonces:

$$f_7(x, y) = f_7\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right) + 1^3} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right) + 1}$$

Utilizar ecuaciones homogéneas para resolver cierto tipo de situaciones.

Supongamos que tenemos una ED de primer orden de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \dots \dots \dots (*)$$

La ED (*) es homogénea, si ambas funciones coeficientes M y N, son homogéneas del mismo grado.

Supongamos que son de grado α , entonces:

$$M(tx, ty) = t^\alpha M(x, y) \quad (1)$$

$$N(tx, ty) = t^\alpha N(x, y) \quad (2)$$

Dado que M y N son homogéneas de grado α , podemos escribir lo siguiente: (1*)

$$M(x, y) = x^\alpha M(1, u)$$

$$\text{Donde } u = \frac{y}{x}$$

$$xu = y$$

$$N(x, y) = x^\alpha N(1, u)$$

Podríamos utilizar el cambio de variable anterior y el siguiente: (2*)

$$M(x, y) = y^\alpha M(v, 1)$$

$$\text{Donde } v = \frac{x}{y}$$

$$yv = x$$

$$N(x, y) = y^\alpha N(v, 1)$$

Demostrar

Retomamos la ED (*):

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Dado que la ED es Homogénea. Utilizaremos los dos anteriores cambios de variables realizados. En el cual sustuiremos.

Utilizando la 1era sustitución (igualdad) obtenemos la siguiente ED:

$$x^\alpha M(1, u)dx + x^\alpha N(1, u)dy = 0$$

Despejando x^α tenemos que:

$$M(1, u)dx + N(1, u)dy = 0$$

Podemos observar que ahora que ya tenemos casi toda la ED en términos de “x” y de “u”, dado que el primer caso la ED solo estaba en términos de “x” y de “y”.

Ahora, para escribir a toda la ED en términos de “x” y de “u”, el diferencial de “y” es el que debemos de intercambiar.

Dado que:

$$y = xu$$

Derivando las 2 funciones que dependen de “x”, aplicamos la regla del producto obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

Si multiplicamos toda la ecuación anterior por el diferencial de “x”, tendríamos que:

$$dy = udx + xdu$$

Ahora lo sustituimos de la siguiente forma:

Dada la ED:

$$M(1, u)dx + N(1, u)dy = 0$$

Y que $dy = udx + xdu$, tenemos que:

$$M(1, u)dx + N(1, u)(udx + xdu) = 0$$

Por lo tanto ya tenemos una ED, en términos de “x” y de “u”.

Entonces con la ED:

$$M(1, u)dx + N(1, u)(udx + xdu) = 0$$

Tenemos que ahora asociando todo lo que depende del diferencial de “x” quedaría de la siguiente forma:

$$[M(1, u) + uN(1, u)]dx + xN(1, u)du = 0$$

Lo cual ahora es una ED separable. Lo cual sería igual a:

$$\frac{dx}{x} = - \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)} du$$

Ejemplo: Resolver $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

En este caso las funciones son:

$$M(x, y) = x^2 + y^2$$

$$N(x, y) = x^2 - xy$$

Podemos visualizar que la ED no es separable. Ahora, ¿la ecuación diferencial será exacta?, en este caso no, por lo tanto la ED no es separable ni exacta. Entonces no podemos resolverla con los métodos conocidos.

Ahora, ¿Es una ED homogénea?

Para eso necesitamos sustituir:

$$M(tx, ty) = t^2 M(x, y)$$

$$N(tx, ty) = t^2 N(x, y)$$

Por lo tanto, la ED es homogénea, porque N y M son homogéneas del mismo grado. De lo contrario no sería homogénea si los grados difieren entre sí, es decir, que no son los mismos grados.

Entonces, tenemos 2 cambios de variable:

(1) Cambio de variable a considerar:

$$y = ux$$

(2) Cambio de variable a considerar:

$$x = vy$$

Utilizando el 1er cambio de variable:

$$y = ux$$

Sería igual a:

$$dy = udx + xdu$$

Utilizando el 2do cambio de variable:

$$x = vy$$

Sería igual a:

$$dx = vdy + ydv$$

Tomaremos el 1er cambio de variable:

$$y = ux$$

Dada la ED:

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

La ED se convierte en una ED separable:

$$(x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - x^2u)(udx + xdu) = 0$$

Ahora lo que haremos será asociar todo lo que depende del diferencial de “x” y lo que depende del diferencial de “u”.

Realizando el álgebra tenemos que:

$$(x^2 + u^2x^2 + x^2u - x^2u^2)dx + (x^3 - x^3u)du = 0$$

Reescribiendo la ED y Factorizando:

$$x^2(1 + u)dx + x^3(1 - u)du = 0$$

¿Esta ecuación diferencial es separable o no?

R = Sí.

Dado que es separable: Todo lo que depende de “x”, lo dejamos de lado izquierdo.

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{u - 1}{1 + u} \right) du$$

Con la nueva ED, encontrar quien es “u”, dejar a “u” en términos de “x”, encontrar quien es la función u.

Para resolver la ED original, la cual para resolverla tenemos que saber quién es “y”, dado el cambio de variable $y = ux$, sustituimos a “u” y obtenemos a “y”, la cual es la solución de la ED original.