Apunte 1

$F = ma$
$F(t, r, v) = ma(t)$
$F(t, r, v) - ma(t) = 0$

Una ecuación algebraica es una ecuación de la forma $p(x) = 0$ donde $p(x) = 0$ es un polinomio no nulo ni constante con coeficientes enteros.

$x - 15 = 0 \implies$ Ecuación algebraica lineal.
$\underline{x = 15}$

$x^2 + 1 = 0 \implies$ Ecuación algebraica de segundo orden.
$\underline{x = \pm i}$

Definición: Una ecuación que contiene derivadas de una (o más) variable respecto a una (o más) variable independiente se dice que es una ecuación diferencial (ED).

Función:

$\implies y = \phi(x)$ x – es la variable independiente; y es la variable dependiente.

Otra Función:

$$\implies \frac{dy}{dx} = \phi'(x) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$
$$\implies \frac{d^2y}{dx^2} = \phi''(x)$$

Clasificación de las ED
- Tipo
- Orden
- Linealidad

Tipo: Si una ED contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente, se dice que es una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).

$$y = \phi(x) \qquad \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$x(t), y(t) \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx} = 2x + y$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx^3}, \ldots.$$

$$y', y'', y''' , y^4 = \frac{d^4y}{dx^4} , \ldots , y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

$\therefore$

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \qquad \Longrightarrow \qquad y' + 5y = e^x$$

$$y'(x) + 5y(x) = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 6ty \qquad \Longrightarrow \qquad y'' - y' + 6y = 0$$

$$y''(t) - y'(t) + 6y = 0$$

Orden: El orden de una ED (EDO). Es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

EDO de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

EDO de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + 8 = 0$$

EDO de tercer orden:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 5\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

Podemos expresar una EDO de n-ésimo orden con una variable dependiente por la “Forma General”.

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables $x, y, y', \dots, y^{(n)}$

Ecuación de orden 2:

$$y'' + 5y' - 4y = e^x$$

Forma general:

$$\underbrace{y'' + 5y' - 4y - e^x}_{F(x, y, y', y'')} = 0$$

$$\underbrace{y^{(4)} - 3y'' + 2y}_{F(x, y, y', y'', y'' \;, y^{(4)})} = 0$$

$$\Uparrow \quad \Uparrow \qquad \Uparrow$$

Contiene esto

La ecuación diferencial:

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

Donde f es una función continua con valores reales, se conoce como la Forma Normal de la ecuación:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Sea la ED:

$$y'' + 5y' - 4y = e^x$$

Forma general:

$$y'' + 5y' - 4y - e^x = 0$$

Forma normal:

$$y'' = \underbrace{-5y' + 4y + e^x}_{F(x,y,y')}$$

Sea la ED:

$$4xy' + y = x$$

Forma general:

$$4xy' + y - x = 0$$

Forma normal:

$$y' = \frac{-y+x}{4x} = \frac{-y}{4x} + \frac{1}{4}$$

Forma normal de las EDO de primer orden:

$$y' = f(x,y)$$

Forma normal de las EDO de segundo orden:

$$y'' = f(x,y,y')$$

Linealidad: Una ED de n-ésimo orden:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Se dice que es lineal si F es lineal en $y, y', \dots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Es:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$$

Despejando $g(x)$:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

EDO de primer orden: $F(x, y, y') = 0$

Lineal: $a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$

EDO de segundo orden: $F(x, y, y', y'') = 0$

Lineal: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$

Propiedades:

1. La variable dependiente y todas sus derivadas $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$; son de primer grado, i. e, la potencia de cada termino que contiene a “y” es igual a 1.

2. Los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ de $y, y', \dots, y^{(n)}$ dependen a lo mas de la variable independiente “x”.

Ejemplos:

EDO lineal de segundo orden:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Coeficientes:

$$a_2(x) = 1, \quad a_1(x) = -2, \quad a_0(x) = 1$$

EDO no lineal de segundo orden:

$$y'' + 5(y')^3 - 4y = se^{\;n}\ (x)$$

EDO no lineal:

$$(1 - y)y' + 2y = e^x$$

$$a_1(x, y) = 1 - y$$

EDO no lineal:

$$y'' + 2y' + se^{\;n}\ (y) = 0$$

Función no lineal de y

EDO no lineal:

$$(1 - y)y' + 2y = e^y$$